Q1. $\overrightarrow{v_{G_2,2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G_2}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d(X.\overrightarrow{x_0}+a.\overrightarrow{x_2})}{dt}\right]_0 = \dot{X}.\overrightarrow{x_0} + a.\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_0 = \dot{X}.\overrightarrow{x_0} + a.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{y_2}$

$\overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{v_{G_2,2/0}}}{dt}\right]_0$

$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = \ddot{X}.\overrightarrow{x_0} - a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_2}}$

Car $\ddot{\theta}_2 = 0$

Q2. R_0 est galiléen car en translation uniforme par rapport au sol dont le repère est considéré galiléen.

D'après le Théorème de la Résultante Dynamique appliqué à S_2 dans son mouvement par rapport à R_0 :

$m.\overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{1/m}}$

Avec $\vec{P}$ le poids de S_2 et $\overrightarrow{F_{1/m}}$ la résultante de S_1 sur S_2.

Donc : $m.\left(\ddot{X}.\overrightarrow{x_0} - a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_2}\right) = m.g.\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{F_{m/1}}$

$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{F_{m/1}} = (m.g - \ddot{X}).\overrightarrow{x_0} + m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_2}}$

Q3. D'après la condition de roulement sans glissement en I entre 3 et 2 :

$\overrightarrow{v_{I,3/2}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_{I,3/0}} = \overrightarrow{v_{I,2/0}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{O_3,3/0}} + \overrightarrow{IO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{v_{O_2,2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

$\Rightarrow \vec{0} + R.\overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\theta}_3.\overrightarrow{z_0} = \vec{0} - R.\overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\theta}_2.\overrightarrow{z_0}$

$\Rightarrow R.\dot{\theta}_3.\overrightarrow{x_0} = -R.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{x_0}$

$\boxed{\Rightarrow \dot{\theta}_3 = -\dot{\theta}_2}$

Q4. Par analogie avec la question 2 :

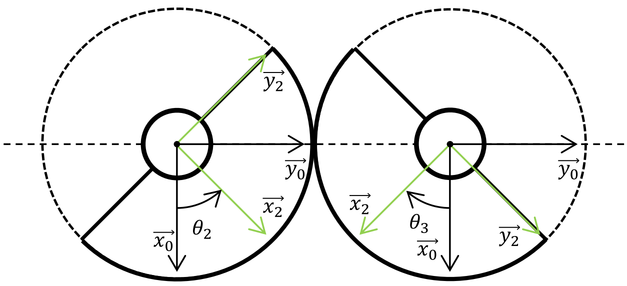
$\overrightarrow{F_{m/1}} = (m.g - \ddot{X}).\overrightarrow{x_{0,1}} + m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_2} + (m.g - \ddot{X}).\overrightarrow{x_{0,1}} + m.a.\dot{\theta}_3^{\,2}.\overrightarrow{x_3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_{m/1}} = (m.g - \ddot{X}).\overrightarrow{x_{0,1}} + m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_2} + (m.g - \ddot{X}).\overrightarrow{x_{0,1}} + m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.\overrightarrow{x_3}$

$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{F^c_{m/1}} = m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.(\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3})}$

Q5. Il faut que $m.a.\dot{\theta}_2^{\,2}.(\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}).\overrightarrow{y_0} = 0$ donc $\sin(\theta_2) = -\sin(\theta_3)$

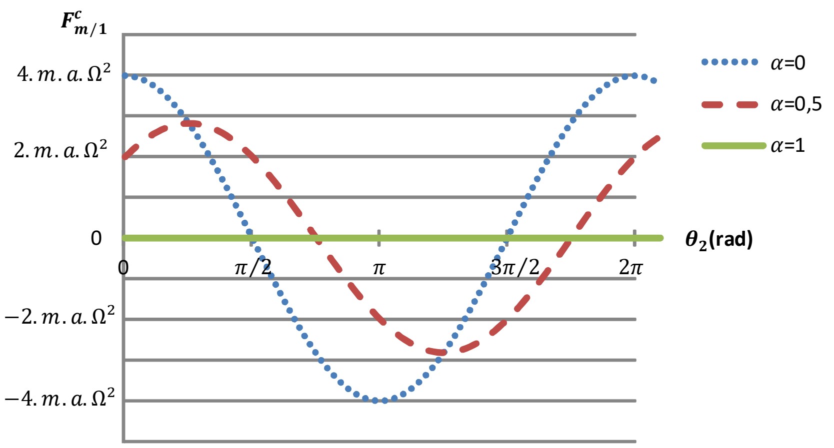
Q6. Donc $\exists\, k \in \mathbb{Z} \,/\, \theta_2 = \pi + \theta_3 + 2.k.\pi$ mais cette solution ne convient pas car dans ce cas $(\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}).\overrightarrow{x_0} = 0$ et donc $\overrightarrow{F^c_{m/1}} = \vec{0}$



La solution retenue est donc :

$\boxed{\exists\, k \in \mathbb{Z} \,/\, \theta_2 = -\theta_3 + 2.k.\pi}$

Q7.



Q8. Au démarrage et à l'arrêt, α est réglé à 1 pour annuler $F^{c}_{m/1}$ et éviter les vibrations nuisibles pour l'environnement. On le fait ensuite évoluer de manière continue jusqu'à obtenir l'effort centrifuge voulu.

Q9. En considérant l'hypothèse que la masse de la masselotte est répartie de façon homogène, la symétrie de la masselotte suivant le plan $(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{z_2})$ justifie que $y_{G_2}=0$ et la symétrie suivant le plan $(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2})$ justifie que $z_{G_2}=0$. G_2 est donc situé suivant l'axe $(O_2,\overrightarrow{x_2})$.

Q10. $m_e = 4.m.a = 4.m.\frac{4.R}{3.\pi} = \frac{16.56.0{,}168.0{,}32}{3}$

$\boxed{\Rightarrow m_e = 16\ kg.m}$

Q11. $F_{max} = m_e.(\Omega_{max})^2 = 16.\left(2400.\frac{2.\pi}{60}\right)^2$

$\boxed{\Rightarrow F_{max} = 1024\ kN}$

Q12. $\boxed{\overrightarrow{O_0G} = X.\overrightarrow{x_0}}$

$\overrightarrow{IJ_0} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GO_0} + \overrightarrow{O_0J_0}$

$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{IJ_0} = (-L-X+h).\overrightarrow{x_0}}$

Soit $\overrightarrow{F_a}$ l'action du ressort a sur V et $\overrightarrow{F_b}$ l'action du ressort b sur V :

$\overrightarrow{F_a} = -k_a.(X-l_a).\overrightarrow{x_0}$	On a bien $\overrightarrow{F_a}.\overrightarrow{x_0} < 0$ quand $X > l_a$.
$\overrightarrow{F_b} = k_b.(-L-X+h-l_b).\overrightarrow{x_0}$	On a bien $\overrightarrow{F_b}.\overrightarrow{x_0} < 0$ quand $l_b > h-X-L$.

Q13. D'après le Théorème de la Résultante Dynamique appliqué à V dans son mouvement par rapport à R_0, en projection sur $\overrightarrow{x_0}$:

$$\boxed{(M+\rho.L.A_p).\ddot{X}(t) = -k_a.(X(t)-l_a) + k_b.(-L-X(t)+h-l_b) + (M+\rho.L.A_p).g + F_e(t)}$$

Q14. A l'équilibre statique, $\ddot{X}=0$ et $F_e=0$ donc on obtient :

$0 = -k_a.(X_s-l_a) + k_b.(-L-X_s+h-l_b) + (M+\rho.L.A_p).g$

$$\boxed{\Rightarrow (M+\rho.L.A_p).g - k_a.(X_s-l_a)0 - k_b.(X_s+L+l_b-h) = 0}$$

Q15. D'après la question 14, $(M+\rho.L.A_p).g = k_a.(X_s-l_a) + k_b.(X_s+L+l_b-h)$.

On remplace dans l'équation obtenue question 13 :

$(M+\rho.L.A_p).\ddot{X}(t) = -k_a.(X(t)-l_a) + k_b.(-L-X(t)+h-l_b) + k_a.(X_s-l_a) + k_b.(X_s+L+l_b-h) + F_e(t)$

$\Rightarrow (M+\rho.L.A_p).\ddot{X}(t) = -k_a.(X(t)-X_s) - k_b.(X(t)-X_s) + F_e(t)$

Or $\ddot{u}(t) = \ddot{X}(t)$, d'où :

$$\boxed{(M+\rho.L.A_p).\ddot{u}(t) + (k_a+k_b).u(t) = F_e(t)}$$

On a donc $M_t = M+\rho.L.A_p$ et $K_t = k_a+k_b$

Q16. D'après (1) : $\ddot{u}(t) + {\omega_0}^2.u(t) = \frac{F_e(t)}{M_t}$

Avec $u(t) = s(\Omega).\cos(\Omega.t)$

Donc $\dot{u}(t) = -\Omega.s(\Omega).\sin(\Omega.t)$

Et $\ddot{u}(t) = -\Omega^2.s(\Omega).\cos(\Omega.t)$

D'où $-\Omega^2.s(\Omega).\cos(\Omega.t) + {\omega_0}^2.s(\Omega).\cos(\Omega.t) = \frac{F_e(t)}{M_t}$

$$\Rightarrow s(\Omega).\cos(\Omega.t).({\omega_0}^2-\Omega^2) = \frac{F_e(t)}{M_t}$$

$$\Rightarrow u(t).({\omega_0}^2-\Omega^2) = \frac{F_e(t)}{M_t}$$

$\Rightarrow\ u(t) = \frac{F_e(t)}{M_t.({\omega_0}^2-\Omega^2)}$ avec $\omega_0 \neq \Omega$

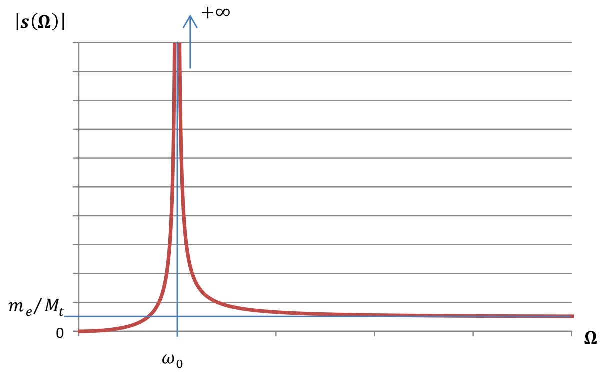
$$\boxed{\Rightarrow u(t) = \frac{m_e.\Omega^2.\cos(\Omega.t)}{M_t.({\omega_0}^2-\Omega^2)}}$$ avec $\omega_0 \neq \Omega$

Q17. $s(\Omega) = \frac{m_e.\Omega^2}{M_t.({\omega_0}^2-\Omega^2)}$

$$\Rightarrow \frac{ds(\Omega)}{d\Omega} = \frac{m_e}{M_t}.\frac{2.\Omega.{\omega_0}^2}{({\omega_0}^2-\Omega^2)}$$

On en déduit le tableau de variation

Ω	0		ω_0		$+\infty$
$\frac{ds(\Omega)}{d\Omega}$		$+$	‖	$+$	
$s(\Omega)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{m_e}{M_t}$
$\lvert s(\Omega)\rvert$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{m_e}{M_t}$



Q18. Au démarrage, quand Ω croît jusqu'à une valeur supérieure à ω_0, on passe par la phase de résonnance où l'amplitude du déplacement est théoriquement infinie. En pratique, les coussins modélisés par un ressort pur apportent un amortissement dû notamment au matériau (élastomère).

Q19. $A = 2.\frac{m_e}{M_t} = 2.\frac{m_e}{M} = 2.\frac{16}{3210}$

$$\boxed{\Rightarrow A = 0{,}01\ m = 10\ mm}$$

Q20. L'interaction entre le sol et le profilé pourrait être modélisée non pas comme un ressort mais comme l'association d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle.

Q21. Poutre en traction / compression donc : $\sigma(x,t).A_p = N(x,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x}.A_p = \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}$$

Or $\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x} = E\cdot\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial x} = E\cdot\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$

Donc $\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = A_p.E.\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$

En remplaçant dans l'équation de l'équilibre de la poutre :

$$\rho.A_p.\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2} - A_p.E.\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}.\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

D'où $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$

Q22.

- On isole le point G de masse M. la position de G est définie à un instant quelconque par : $\overrightarrow{O_0G} = [X_S + u(0,t)]\vec{x}_0$

  L'accélération du point G se calcule directement : $\frac{d^2(\overrightarrow{O_0G}\cdot\vec{x}_0)}{dt^2} = \frac{\partial^2u(0,t)}{\partial t^2}$

  En écrivant le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}_0$, il vient :

  $$M\frac{\partial^2u(0,t)}{\partial t^2} = -k_a(X_s + u(0,t) - l_a) + Mg + \vec{F_e}.\vec{x}_0 + N(0,t)$$

  A l'équilibre : $u(0,t) = 0$; $\frac{\partial^2u(0,t)}{\partial t^2} = 0$; $F_e = 0$; $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ (pas de déformation donc $N(0,t) = 0$).

Il reste :
$0 = -k_a(X_s - l_a) + Mg$
En combinant les deux équations, on retrouve la première condition aux limites en $x = 0$:
$$\boxed{M\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} + k_a u(0,t) - EA_p\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = F_e\cos\Omega t}$$

- On isole le point I extrémité de la poutre. Il n'y a pas de masse concentrée, donc les forces d'inerties sont nulles. Il reste en écrivant le principe fondamentale de la dynamique sur $\vec{x}_0$:
$-k_b u(L,t) - N(L,t) = 0$

$$\boxed{\Rightarrow EA_p\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + k_b u(L,t) = 0}$$

Q23. On calcule les dérivées partielles :

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x)(-C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t))$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x,t)$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = p(t)\left(-\frac{A\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + \frac{B\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)\right)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u(x,t)$

Q24. On repart du premier membre de l'équation d'ondes :
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 u(x,t) + \frac{E}{\rho}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u(x,t) = 0}$$
Donc $u(x,t)$ vérifie bien l'équation d'ondes

Q25. On repart des équations (3) et (4) du sujet dans le cas homogène c'est-à-dire $F_e = 0$. Il reste :
$$\begin{cases} M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k_a u(0,t) = 0 \\ EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + k_b u(L,t) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -M\omega^2 u(0,t) - \frac{EA_p p(t) B\omega}{c} + k_a p(t) A = 0 \\ EA_p p(t)\left(-\frac{A\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) + \frac{B\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)\right) + k_b p(t)\left(A\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)\right) = 0 \end{cases}$$
Ces équations étant vraies à tout instant, on peut simplifier par $p(t)$. Il reste :
$$\begin{cases} -M\omega^2 A - \frac{EA_p\omega}{c}B + k_a A = 0 \\ EA_p\left(-\frac{A\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) + \frac{B\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)\right) + k_b\left(A\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)\right) = 0 \end{cases}$$
Donc sous forme matricielle en introduisant la notation $\alpha = \frac{\omega}{c}L$:
$$\boxed{\begin{pmatrix} k_a - \frac{Mc^2}{L^2}\alpha^2 & -\frac{EA_p}{L}\alpha \\ k_b\cos\alpha - \frac{EA_p}{L}\alpha\sin\alpha & \frac{EA_p}{L}\alpha\cos\alpha + k_b\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Q26. Le système admet une solution autre solution que la solution nulle si et seulement si la matrice est non inversible, ce qui s'écrit : $\det(M) = 0$. Soit :
$$\boxed{(2 - 200\alpha^2)(\sin\alpha + 20\alpha\cos\alpha) + 20\alpha(\cos\alpha - 20\alpha\sin\alpha) = 0}$$

Q27. On cherche les racines de $h(\alpha)$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$. On a $0 < \frac{1}{\sqrt{300}} < \sqrt{\frac{31}{6300}} < \sqrt{\frac{3}{200}} < \sqrt{\frac{63}{200}} < \frac{\pi}{2}$

On montre facilement que $\forall\alpha \in]0,1/\sqrt{300}[\,, h(\alpha) > 0$ comme somme et produit de fonctions positives. Comme $h(\alpha)$ est continue sur l'intervalle, il ne peut pas y avoir de racine de h sur $]0,1/\sqrt{300}[$.

De la même manière, on montre que $\forall\alpha \in]\sqrt{\frac{3}{200}},\pi/2[\,, h(\alpha) < 0$ comme somme et produit de fonctions négatives.

Comme $h(\alpha)$ est continue sur l'intervalle, il ne peut pas y avoir de racine de h sur $]\sqrt{\frac{3}{200}},\pi/2[$.

Les seules racines de h dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ appartiennent donc à $]\frac{1}{\sqrt{300}},\sqrt{\frac{3}{200}}[$.

Q28. Le calcul de h' donne :
$$h'(\alpha) = (31 - 6300\alpha^2)\cos\alpha + (-630 + 2000\alpha^2)\alpha\sin\alpha$$

Q29. Un tableau de variation de la fonction $h(\alpha)$ sur $]\sqrt{\frac{31}{6300}}, \sqrt{\frac{3}{200}}[$ donne :

α	$\sqrt{\frac{31}{6300}}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{3}{200}}$
$h'(\alpha)$	-
$h(\alpha)$	$h(\sqrt{\frac{31}{6300}}) \approx 1{,}37$ $\searrow$ $h\left(\sqrt{\frac{3}{200}}\right) \approx -0{,}42$

Comme h est continue, strictement décroissante sur $]\sqrt{\frac{31}{6300}}, \sqrt{\frac{3}{200}}[$ et que $h\left(\sqrt{\frac{31}{6300}}\right) > 0$ et $h\left(\sqrt{\frac{3}{200}}\right) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha = \alpha_0 \in]\sqrt{\frac{31}{6300}}, \sqrt{\frac{3}{200}}[$ tel que $h(\alpha_0) = 0$.

Q30. h est continue et d'après les valeurs numériques de l'énoncé :

$$\forall \alpha \in]\frac{1}{\sqrt{300}}; \sqrt{\frac{31}{6300}}[\qquad h(\alpha) > 1{,}1610 - 0{,}0334 > 1{,}12$$

La fonction h n'a donc pas de racine dans l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{300}}; \sqrt{\frac{31}{6300}}[$.

On a donc démontré que la fonction h possède une racine unique entre $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que cette racine α_0 se situe dans l'intervalle :

$$\sqrt{\frac{31}{6300}} < \alpha_0 < \sqrt{\frac{3}{200}}$$

Q31. On utilise la méthode de dichotomie par exemple :

```
Début fonction
    Données : f, a, b, ε
    tant que (b −a) > ε faire
        c ←(a +b)/2
        si f(a) x f(c) ≤0 alors
            b ←c
        sinon
            a ←c
        fin
    fin
    retourner (a +b)/2
Fin fonction
```

Q32. L'application numérique des expressions de l'énoncé donne :

$$\varphi_1(x) = \cos(\frac{\alpha_1 x}{L}) + \left(-10\alpha_1 + \frac{1}{10\alpha_1}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1 x}{L}\right) = \cos(0{,}01161x) - 0{,}2994\sin(0{,}01161x)$$
$$\varphi_2(x) = \cos(\frac{\alpha_2 x}{L}) + \left(-10\alpha_2 + \frac{1}{10\alpha_2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_2 x}{L}\right) = \cos(0{,}16612x) - 16{,}5518\sin(0{,}16612x)$$

Q33.

- Si le mouvement de la poutre s'effectue sur le mode 1 uniquement, on peut écrire :
  $$u(x,t) = \varphi_1(x)p_1(t) \approx Kp_1(t)$$
  Car la fonction φ_1 est presque constante sur l'intervalle $[0,10]$. La réponse ne dépend alors plus de x et le barreau possède un comportement de corps solide. Tous les points vibrent de la même manière en fonction du temps.

- Si le mouvement de la poutre s'effectue sur les modes 1 et 2, on peut écrire :
  $$u(x,t) = \varphi_1(x)p_1(t) + \varphi_2(x)p_2(t) \approx Kp_1(t) + \varphi_2(x)p_2(t)$$
  Chaque point de la poutre se déplace indépendamment à chaque instant.

Q34. Pour montrer que <·,·> définit un produit scalaire, il faut montrer que l'application est symétrique, bilinéaire, définie et positive.

- On montre trivialement que $< f, g >=< g, f >$ pour tout $f, g \in \mathrm{C}([0, L], \mathbb{R})$: l'application est symétrique.
- $< f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 >= \lambda_1 < f, g_1 > + \lambda_2 < f, g_2 >$: l'application est bilinéaire symétrique.
- $< f, f >= 0 \Leftrightarrow \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L f^2(x)dx + Mf^2(0) = 0$. Comme f est continue sur $[0, L]$, cela implique que $f(x) = 0\ \forall x \in [0, L]$. L'application est donc définie.
- $< f, f >= \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L f^2(x)dx + Mf^2(0) > 0$. L'application est positive.

Donc <·,·> définit un produit scalaire sur $\mathrm{C}([0, L], \mathbb{R})$.

Q35. $u(x, t) = \varphi_n(x) p_n(t)$ vérifie l'équation d'ondes donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_n(x)\left(-\omega_n^2 p_n(t)\right) - c^2 \varphi_n{}''(x) p_n(t) = 0$$

Cette équation étant vraie pour tout temps t :

$$-\omega^2 \varphi_n(x) - c^2 \varphi_n''(x) = 0$$

Multiplions par $\varphi_r(x)$ quelconque et intégrons, il vient :

$$\boxed{\omega_n^2 \int_0^L \varphi_n(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x + c^2 \int_0^L \varphi_n{}''(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi_r \in \mathrm{C}([0, L], \mathbb{R})}$$

Q36. On part de l'équation donnée dans l'énoncé :

$$\int_0^L [\varphi_n{}''(x)\varphi_r(x) - \varphi_n(x)\varphi_r{}''(x)]\mathrm{d}x = \frac{M}{EA_p}(\omega_n^2 - \omega_r^2)\varphi_n(0)\varphi_r(0)$$

Comme $\varphi_k''(x) = -\omega_k^2 \varphi_k(x)$, l'équation précédente s'écrit :

$$\int_0^L [-\omega_n^2 \varphi_n(x)\varphi_r(x) + \omega_r^2 \varphi_n(x)\varphi_r(x)]\mathrm{d}x = \frac{M}{EA_p}(\omega_n^2 - \omega_r^2)\varphi_n(0)\varphi_r(0)$$

$$-(\omega_n^2 - \omega_r^2)\int_0^L \varphi_n(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x = \frac{M}{EA_p}(\omega_n^2 - \omega_r^2)\varphi_n(0)\varphi_r(0)$$

Ce qui équivaut pour $n \neq r$ ($\omega_n \neq \omega_r$) à :

$$\boxed{\frac{M}{EA_p}\varphi_n(0)\varphi_r(0) + \int_0^L \varphi_n(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall (\varphi_r)_{r\neq n} \in \mathrm{C}([0, L], \mathbb{R})}$$

Q37. $u(x, t)$ est solution de l'équation (S) donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On projette l'équation sur la déformée modale $\varphi_r(x)$ et on intègre :

$$\int_0^L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varphi_r(x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi_r(x)\right]\mathrm{d}x = 0$$

On intègre par parties la dérivant en espace :

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varphi_r(x)\mathrm{d}x - c^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\varphi_r(x)\right]_0^L + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\varphi_r{}'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Or d'après les équations (4) et (3) de l'énoncé on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\frac{k_b}{EA_p}u(L, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{M}{EA_p}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + \frac{k_a}{EA_p}u(0, t) - \frac{F_e}{EA_p}\cos\Omega t$$

Il vient :

$$\int_0^L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varphi_r(x) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\varphi_r{}'(x)\right]\mathrm{d}x + \frac{c^2 k_b}{EA_p}u(L, t)\varphi_r(L) + \left(\frac{c^2 M}{EA_p}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + \frac{c^2 k_a}{EA_p}u(0, t) - \frac{c^2 F_e}{EA_p}\cos\Omega t\right)\varphi_r(0) = 0$$

D'où l'équation de l'énoncé :

$$\boxed{\frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varphi_r(x) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\varphi_r{}'(x)\right]\mathrm{d}x + k_b u(L, t)\varphi_r(L) + \varphi_r(0)\left[M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + k_a u(0, t) - F_e\cos\Omega t\right] = 0}$$

Q38. A partir de l'équation précédente, on écrit que $u(x, t)$ se décompose sur la base modale :
$u(x, t) = \sum_n \varphi_n(x) q_n(t)$ donc $\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_n \varphi_n{}'(x) q_n(t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_n \varphi_n(x)\ddot{q_n}(t)$
Il vient :

$$\sum_n \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \varphi_n(x)\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x \cdot \ddot{q_n}(t) + \sum_n EA_p \int_0^L \varphi_n{}'(x)\varphi_r{}'(x)\,\mathrm{d}x \cdot q_n(t) + k_b \sum_n \varphi_n(L)\,\varphi_r(L) q_n(t)$$
$$+ \sum_n M\varphi_r(0)\varphi_n(0)\ddot{q_n}(t) + \sum_n k_a \varphi_r(0)\varphi_n(0) q_n(t) - \varphi_r(0) F_e \cos\Omega t = 0$$

On sépare alors les sommes sur n entre les cas $n \neq r$ et le cas $n = r$. Dans le cas $n \neq r$ on se sert des équations (6) et (7) issues de la question (36). Il reste :

$$\boxed{\left[\frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \varphi_r^2(x)\,\mathrm{d}x + M\varphi_r^2(0)\right]\ddot{q_r}(t) + \left[EA_p\int_0^L \varphi_r'^2(x)\,\mathrm{d}x + k_b\varphi_r^2(L) + k_a\varphi_r^2(0)\right]q_n(t) = \varphi_r(0)F_e\cos\Omega t}$$

Ce qui est bien de la forme demandée avec :

$$M_r = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \varphi_r^2(x)\,\mathrm{d}x + M\varphi_r^2(0)$$
$$K_r = EA_p\int_0^L \varphi_r'^2(x)\,\mathrm{d}x + k_b\varphi_r^2(L) + k_a\varphi_r^2(0)$$
$$F_r = F_e\varphi_r(0)$$

Q39. On cherche à démontrer la convergence absolue de la série de fonction. Pour $n \geq 5$ et $\forall x \in [0, L]$, on a :

$$\left|\sum f_n(x)\right| < \sum |f_n(x)| \leq \frac{6L^2}{Mc^2}\sum\frac{1}{\alpha_{n-3}^3} \leq \frac{6L^2}{Mc^2}\sum\frac{8}{\pi^3(2n-3)^3}$$

Or

$$\sum\frac{1}{(2n-3)^3} \sim \sum\frac{1}{n^3}$$

Et $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, donc $\sum f_n(x)$ est majorée en valeur absolue par une série convergente. La série de fonction est donc absolument convergente donc convergente.

Q40. La dérivée seconde de la réponse statique est nulle, donc 'est une fonction du premier degré qui s'écrit :

$$\bar{u}(x) = ax + b$$

On détermine les constantes a et b par les conditions aux limites en 0 et L, ce qui donne le système 2x2 suivant :

$$\begin{cases} -EA_p a + k_a b = F_e \\ EA_p a + k_b(aL + b) = 0 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} a = -\dfrac{k_b F_e}{(k_a + k_b)EA_p + k_a k_b L} = -\dfrac{100}{31}\cdot\dfrac{F_e}{Mc^2}L \\ b = \dfrac{F_e}{k_a} - \dfrac{10F_e}{31k_a} = \dfrac{2100}{31}\cdot\dfrac{F_e}{Mc^2}L^2 \end{cases}}$$

Q41. Le résidu statique s'écrit :

$$Res(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{K_n}F_e = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{K_n}F_e - \left(\frac{\varphi_1(x)}{K_1} + \frac{\varphi_2(x)}{K_2}\right)F_e = \bar{u}(x) - \left(\frac{\varphi_1(x)}{K_1} + \frac{\varphi_1(x)}{K_1}\right)F_e$$

On en déduit une approximation de la fonction $u(x, t)$:

$$\boxed{u(x,t) = \left(-\frac{100L}{31Mc^2}(x - 21L) + \frac{\varphi_1}{K_1 - M_1\Omega^2} + \frac{\varphi_2}{K_2 - M_2\Omega^2} - \frac{\varphi_1(x)}{K_1} - \frac{\varphi_1(x)}{K_1}\right)F_e\cos(\Omega t)}$$

Q42. Pour un profilé enfoncé à mi-hauteur, c'est le déplacement du point milieu de la poutre ($x = 5$m) qui participe aux vibrations de surface nuisibles à l'environnement. L'amplitude du déplacement diminue d'un facteur 6 en haute fréquence par rapport au déplacement en basse fréquence.