

Guide : les bonnes pratiques pour la rédaction d'un raisonnement mathématique

1 Introduire les objets que l'on va manipuler

ON NE PARLE PAS DE CE QUI N'EXISTE PAS

Toute notation, quelle qu'elle soit, doit être introduite

1.1 Introduire une variable

Toute variable (au sens large : nombre, fonction, suite, vecteur, ensemble, etc.) doit être introduite. En particulier, lorsqu'il s'agit de démontrer une propriété $\mathcal{P}(x)$ qui porte sur tous les éléments x d'un ensemble E , on démontre cette propriété sur un élément x quelconque de E : à lui seul, il représente tous les éléments de E . Pour parler d'un tel élément, il faudra TOUJOURS l'introduire pour préciser de qui on parle.

La formule magique qui permet d'introduire - que dis-je d'invoquer - l'élément x qui se veut représentant de tous ses congénères est la suivante :

SOIT $x \in E$

On peut ensuite dire ce qu'on veut sur x . En particulier, si x vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$ c'est que l'on a prouvé la propriété : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$.

1.2 Introduire une fonction

On est souvent amené à introduire des fonctions définies à l'aide d'une expression. Plusieurs options sont envisageables :

DIFFÉRENTES FAÇONS D'INTRODUIRE UNE FONCTION

Pour introduire une fonction entre deux ensembles E et F , que l'on notera f (mais toute autre lettre est acceptable), par une expression $f(x)$, on peut utiliser les options suivantes.

- Soit $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$.
- Soit $f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x)$.
- Soit $f : E \rightarrow F$ la fonction définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = \dots$

Erreur fréquente.

⊥ « Soit $f(x) = e^x - x - 1$ » n'est PAS une option !

Puisqu'on parle de fonction ici, il est aussi important de garder en tête que la notation $'$ pour la dérivation ne s'applique que sur des fonctions et non pas sur des expressions.

⚠ Erreur fréquente.

« $(\sin(x^2)e^x)' = \dots$ » est à bannir. Pour écrire la dérivée de la fonction définie par cette expression, on pourra :

- Introduire la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)e^x \in \mathbb{R}$ et écrire $f'(x) =$;
- Utiliser la notation $\frac{d}{dx} : \frac{d}{dx}(\sin(x^2)e^x) = \dots$

1.3 Introduire une suite ou une famille d'éléments

Les suites (et de manière plus générale, les familles d'éléments indexés par un ensemble I) sont des cas particuliers de fonctions, mais elles ont leur notation propre. Il est alors important de ne pas mélanger les notations entre la suite (la famille) et son terme général. La notation u_n désigne le terme général de la suite (c'est donc un nombre) et pour en parler, il sera donc toujours nécessaire d'introduire au préalable l'indice n . Pour parler de la suite de terme général u_n , on doit noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou parfois plus simple (u_n) .

⚠ Erreur fréquente.

⊥ « La suite u_n » est un non sens !

1.4 Donner un nom à une quantité déjà existante

Pour alléger les notations, il est parfois courant de donner un nom simple à une quantité déjà existante. Dans ce cas, on ne doit plus utiliser le « soit » qui permet d'*introduire* des objets, mais on peut utiliser deux formulations équivalentes qui reposent sur les verbes *poser* ou *noter*.

Exemple. Imaginons que l'on est en train d'étudier le déterminant d'une matrice carrée A . On peut décider d'utiliser la lettre d (qui n'a donc pas été utilisée avant dans le raisonnement) pour parler de son déterminant $\det(A)$. Pour l'écrire, deux formulations sont possibles :

- « On pose $d = \det(A)$. »
- « On note d le déterminant de A » / « On note d le nombre $\det(A)$. »

Le cas des "formules-que-tous-les-profs-de-maths-écrivent-pareil"

Certaines formules, bien connues des étudiants, sont apprises et récitées avec les mêmes notations universelles. Qui ne reconnaît pas $\Delta = b^2 - 4ac$? Ou encore $(uv)' = u'v + uv'$? La liste est longue.

⚠ Erreur fréquente.

⊥ Écrire l'une de ces formules passe-partout sans avoir introduit ses notations est une abomination mathématique !

Exemple. Pour résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, il n'est pas nécessaire de rappeler la formule en introduisant avec lourdeur toutes les notations. On pourra simplement écrire « L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 = -3$. Puisque $(i\sqrt{3})^2 = -3$, les deux solutions sont $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. »

Exemple. Pour dériver la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$, il n'est pas nécessaire de rappeler la formule. Un résultat bien présenté sera suffisant ! On pourra par exemple écrire « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. »

2 Articuler son raisonnement

2.1 Annoncer ce qu'on va faire

Pour rédiger correctement un raisonnement, il est important d'expliquer régulièrement ce que l'on s'apprête à faire ou calculer. Le très classique

« Montrons que »

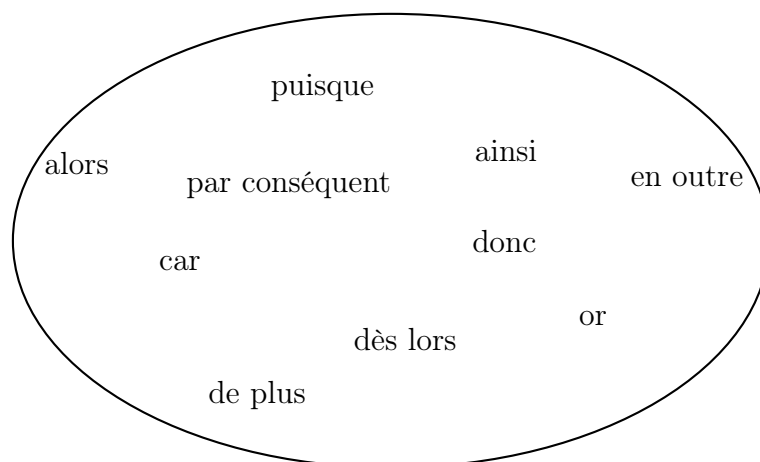
fait souvent l'affaire mais rien ne vous empêche de varier le style : « Il suffit donc de montrer que ... » , « Nous allons prouver que », etc.

Il est également crucial de préciser le mode de raisonnement utilisé : « On raisonne par »

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| ✎ l'absurde. | ✎ double implication. | ✎ double inclusion. |
| ✎ analyse/synthèse. | ✎ équivalence. | ✎ disjonction de cas. |
| ✎ contraposée. | ✎ récurrence. | ✎ etc. |

2.2 Mettre en évidence les articulations logiques

La raisonnement mathématique consiste, dans sa grande majorité, à enchaîner des déductions logiques. Pour marquer ces articulations, libre à vous d'utiliser les mots de liaison adéquats pour indiquer clairement les liens de cause à effet, mais aussi pour fluidifier le style de votre raisonnement. Voici un petit florilège non exhaustif de ce que vous pouvez utiliser :



⚠ Erreur fréquente.

Le symbole \implies n'est à garder que pour parler d'une implication (c'est-à-dire une assertion mathématique $A \implies B$). Tout usage de \implies entre deux affirmations est une faute. Il faudra toujours le remplacer par un mot de liaison ("donc"). Mieux vaut trop de lourdeur en répétant les "donc", que le symbole \implies .

2.3 Le cas de la résolution des équations et du symbole \iff

⚠ Erreur fréquente.

Le symbole \iff est le symbole de l'équivalence de deux assertions mathématiques et pas autre chose.

Pour résoudre une équation \mathcal{E} d'inconnue $x \in E$, l'une des méthodes les plus couramment utilisées, est de déterminer une équation équivalente \mathcal{E}' dont l'ensemble des solutions est simple à trouver. En effet, *deux équations équivalentes sont par définition, deux équations qui ont le même ensemble de solutions*. Pour noter cette équivalence, on utilise le symbole de l'équivalence mathématique :



C'est ce que vous faites depuis le collège sur des équations très simples. C'est aussi ce qu'on fait quand on résout un système linéaire avec le pivot de Gauss. Pour les utilisations du symbole \iff dans un raisonnement en dehors de la résolution d'une équation, il est prudent de s'assurer que l'on en fait bon usage.

Exemple. Supposons que l'on veuille répondre à la question suivante : « Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. » Voici un raisonnement incomplet :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} \iff 1 + \frac{1}{p} \leq \frac{2}{p} \iff 1 \leq \frac{1}{p} \iff p \leq 1$$

Ce simple enchaînement d'équivalences ne suffit pas à montrer le résultat attendu. Il démontre simplement que le résultat attendu est équivalent à $p \leq 1$. Il est donc nécessaire d'ajouter une conclusion. Par exemple, « étant donné que $p \in]0, 1[$, on en déduit que $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. »


2.4 Calculer

Les calculs sont des arguments centraux dans un raisonnement mathématique. Il est important de savoir les rédiger proprement et rigoureusement. Dans une série d'égalités, chaque égalité doit être :

- soit suffisamment évidente ;
- soit justifiée par un petit commentaire (que l'on peut glisser à droite de l'égalité entre parenthèse)

Exemple. On doit montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et on arrive au calcul à faire dans l'hérédité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

 **Erreur fréquente.**

La rédaction suivante est très mauvaise !

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

D'une part, c'est dommage d'écrire 3 fois la même quantité alors qu'une suffit. D'autre part - et surtout ! - ces 3 lignes auraient du être reliées par des mots de liaison pour montrer le lien qu'elles ont.

3 Utiliser son cours

3.1 Utiliser un théorème

Lorsqu'on souhaite utiliser un théorème ou une propriété importante, il n'est pas nécessaire d'en recopier intégralement l'énoncé — que vous aurez, bien entendu, pris soin d'apprendre par cœur ♥. En revanche, il est indispensable d'en rappeler le nom (s'il en possède un), de justifier explicitement la vérification de ses hypothèses, et d'énoncer clairement la conclusion.

Exemple. *Une bonne rédaction pour utiliser la formule des probabilités totales.*

Les événements (A_1, \dots, A_n) forment un système complet d'événements et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Exemple. *Une bonne rédaction pour utiliser le théorème de la limite monotone.*

Il a été démontré que la suite (u_n) est croissante et majorée. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge.

3.2 Définition ou caractérisation ?

DÉFINITION/CARACTÉRISATION

La définition dit ce qu'est l'objet.

La caractérisation dit comment le reconnaître autrement.

Une **définition** est une convention qui introduit un nouvel objet ou une nouvelle propriété. Elle pose le concept en énonçant les conditions minimales et nécessaires pour qu'un objet porte ce nom. Une définition s'écrit : « On dit que *machin* est un *bidule* si *machin* vérifie les propriétés suivantes : *liste de trucs*. »

Une **caractérisation** est un théorème qui donne une condition équivalente à la définition, souvent plus pratique ou plus intuitive. Elle ne crée pas le concept, mais en offre un autre critère, démontré comme équivalent. Elle sera présentée comme suit : « *machin* est un *bidule* si et seulement si *machin* vérifie une *liste d'autres trucs*. »

Lorsque l'on rédige un raisonnement mathématique, les définitions des objets sont supposées connues et il n'est pas forcément nécessaire de les rappeler. En revanche, il faut annoncer la caractérisation comme un résultat préalablement établi.

Exemple. La définition d'une matrice diagonalisable : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Une caractérisation utilisée en pratique : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si son polynôme caractéristique est scindé et si la multiplicité de chaque racine du polynôme caractéristique coïncide avec la dimension du sous-espace propre correspondant.

Exemple. La définition d'une fonction croissante sur un intervalle I : Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si pour tous $x, y \in I$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

Une caractérisation utilisée en pratique pour les fonctions dérivables : Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. f est croissante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.