

Analyse - Faisable en TSI1

1 📖 📍 - Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^{\frac{x+1}{x}}.$$

1. Justifier que f est définie sur $]0, +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = xe^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

2. Python

a) Tracer la fonction f sur $[0, 10]$.

b) Tracer la droite d'équation $y = 2x - 1$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

5.

a) Montrer que f , ainsi prolongée, est dérivable en 0. *On s'intéressera au taux d'accroissement*

b) En déduire que f possède un DL1 en 0 que l'on précisera.

6. Déterminer le DL3 en 1 de f .

7. Étudier f au voisinage de 1 (tangente, position relative par rapport à sa tangente).

2 📖 📍 -

1. Tracer en Python le graphe de \tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis la droite d'équation $y = x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera x_n , dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$.

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$.

4. Développement asymptotique de x_n .

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions \cos et \sin .

c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de \tan .

d) Montrer que quand $u \rightarrow 0$, $\arctan(u) = u + o(u^2)$.

e) En déduire que quand $n \rightarrow +\infty$,

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

3 📖 📍 - On considère l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère trois points $A(1, 1, 1)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(1, -1, 2)$.

1. Ces trois points sont-ils alignés? Justifier.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

3. Le point $D(1, 2, 3)$ est-il dans le plan (ABC) ?

4. Écrire une fonction Python qui prend en argument trois réels (x, y, z) et qui renvoie **True** si le point de coordonnées (x, y, z) est dans le plan (ABC) et **False** sinon.

5. Soit \mathcal{P} le plan d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer l'intersection de \mathcal{P} avec le plan (ABC) .

Intégrales généralisées, séries et séries entières

4 📖 ⚡ - Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{n^2 \tan^2(\frac{1}{n})}.$$

5 🏛️ ⚡ - Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$$

6 📖 ⚡ - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

- Rappeler la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$.
- Quelle est la limite de (r_n) ?
- A l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer un équivalent de r_n .

7 📖 ⚡ -

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} n^2 5^{n+1} x^n.$$

- Calculer la valeur de cette somme pour x dans l'intervalle de convergence.

8 🏛️ ⚡ -

- Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt$ est convergente et calculer sa valeur.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(k+1)t}.$$

- Exprimer $S_n(t)$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} S_n(t) dt$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t) dt$.

9 🏛️ 📍 - On donne, pour tout $x \in I =]0; 1[$, $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$.

- Est-ce que f est prolongeable par continuité en 0 ? En 1 ?
- Montrer que f est bijective sur $[0; 1]$.
- Soit $I_k = \int_0^1 x^k \ln x dx$, $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de I_k et calculer I_k .

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

- Montrer que $\int_0^1 x^n f(x) dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- Sachant que $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

Indication : séparer les rangs pairs et impairs.

- PYTHON.

a) Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$ sur $]0; 1[$ avec un pas de 0,01.

b) Écrire une fonction **Approx**(ε) qui calcule $\int_0^1 f(x) dx$ à ε près, en utilisant

la question 3.b et une majoration de $\int_0^1 x^n f(x) dx$.

Équations et systèmes différentiels

10 📖 ⚡ - On considère la fonction $f(x) = (\arcsin(x))^2$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Quel est le domaine de dérivabilité I de f ?

2. Pour $x \in I$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et en déduire une équation différentielle d'ordre 2 (\mathcal{E}) dont f est solution sur I .

3. Déterminer l'ensemble des solutions développables en série entière de (\mathcal{E}).

11 📖 📍 - On considère le système différentiel linéaire d'ordre 1 suivant, d'inconnues x et y qui sont des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la variable t :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + 3t - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le système s'écrit sous la forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, A est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels et $B(t)$ un vecteur colonne représentant le second membre que l'on précisera.

2. Python

a) Écrire une suite d'instructions en Python utilisant la bibliothèque `numpy` permettant de définir la matrice A .

b) Écrire la ligne de code permettant d'afficher ces valeurs propres.

3. Montrer que la matrice A est diagonalisable et expliciter (par le calcul) ses valeurs propres.


4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel homogène associé $X'(t) = AX(t)$.

5. En utilisant le principe de superposition, chercher une solution particulière du système avec le second membre $B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t - 1 \end{pmatrix}$ sous la forme d'un vecteur dont les composantes sont des polynômes de degré 1.

6. Chercher une solution particulière du système avec le second membre $B_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel initial.

Séries de Fourier

12   - Soit f une fonction 1-périodique définie par : $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $f(x) = |x|$.

1. Tracer le graphe de f sur deux périodes.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
4. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

13   -

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique telle que pour tout $x \in [0; 2\pi[$, $f(x) = e^x$.

1. Quels sont les points de discontinuité de f ?
2. Démontrer que f est bornée sur \mathbb{R} . Donner s'ils existent son minimum et son maximum.

3. Représenter f sur $[-2\pi; 4\pi]$.

4. Rappeler le théorème de Parseval.

5. Calculer les coefficients de Fourier de f .

6. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.$$

7. Déterminer la valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - 1}.$$

8. Python.



a) Représenter f sur $[-2\pi; 2\pi]$.



b) On note pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)).$$

Écrire une fonction **Fourier(n)** qui trace le graphe de $S_n(f)$ sur $[-2\pi; 2\pi]$. Tester avec $n = 25$.

Courbes paramétrées, surfaces et fonctions de deux variables

14   - Étude complète de la courbe paramétrée $x(t) = 3 \cos(t) + \cos(3t)$ et $y(t) = 3 \sin(t) + \sin(3t)$.

15   - On note $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$ et on considère la fonction

$$f : (x, y) \in K \mapsto x^2 e^y.$$

Justifier que f possède une maximum et un minimum sur K , puis les déterminer, en précisant les points où ils sont atteints.

16 📖 📍 - On définit les surfaces $S_1 : x^2 + 2z^2 - 1 = 0$ et $S_2 : y^2 + 3z^2 - 1 = 0$.

1. Montrer que les points $A_1(1, 1, 0)$ et $A_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ appartiennent aux surfaces.

On définit les fonctions f_1 et f_2 de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} par $f_1(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 1$ et $f_2(x, y, z) = y^2 + 3z^2 - 1$.

- 2.
1. Justifier que f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 .
2. Calculer le gradient de f_1 et de f_2 en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les points réguliers de S_1 .
4. Déterminer les équations des plans tangents à S_1 et S_2 en A_1 .
5. Écrire un programme Python permettant de tracer la courbe représentative de

la fonction $F : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$ sur $[0, 1]$.

On pourra utiliser les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot`.

Algèbre linéaire

17 📖 📍 - On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A n'est pas inversible.
2. A l'aide de l'outil informatique, calculer A^2 et A^3 et vérifier que $A^3 = -A^2 + 6A$.
3. Calcul de A^n .
 - a) Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que pour tout $n \geq 1$, $A^n = a_n A^2 + b_n A$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = 6a_n \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Python permettant de calculer a_n et b_n en utilisant la formule de récurrence.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} et en déduire une expression de a_n puis de A^n . Vérifier que cette expression est cohérente pour $n = 1$. L'est-elle pour $n = 0$?

4. Calcul de A^n avec division euclidienne. On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 6X$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P .
- b) Retrouver alors l'expression de A^n en fonction de A^2 et A .

18 🏛️ ⚡ - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$. On considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow ?$ telle que $\varphi(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$.

1. Quel est le domaine d'arrivée de φ ?
2. Que peut-on dire sur φ ?
3. Déterminer le noyau de φ .
4. Déterminer les valeurs propres de φ .

19 🏛️ 📍 - On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $\Phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AMA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie I

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A . A est-elle diagonalisable sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
3. La diagonaliser si c'est possible.

Partie II

4. Montrer que Φ est une symétrie.
5. Calculer la matrice de Φ dans la base canonique.
6. Diagonaliser cette matrice.

Questions d'informatique

7. Écrire une fonction qui prend en argument deux listes (L_1, L_2) telles que `np.array(L_i)` est une matrice M_i et qui renvoie le produit matriciel $M_1 M_2$ sous la même forme de listes.

8. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L telle que $\text{np.array}(L)=M$ et qui renvoie $\Phi(M)$.

9. Retrouver les valeurs propres de Φ .

Partie IV. On travaille désormais dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in E$, on considère l'application $\Psi_X : M \in E \mapsto XMX \in E$. On suppose que 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de X .

10. Montrer que Ψ est une symétrie de E si et seulement si $X^2 = -I_n$.

11. Justifier que si $X^2 = -I_n$, alors n est pair.

20 📖 ⚡ - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux vecteurs colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Quelle est la taille de la matrice VU^T ? Et de U^TV ?

Dans la suite, on pose $\lambda = U^TV$ et $M = VU^T$.

2. Montrer que $\text{rg}(M) \leq 1$.

3. Montrer que $\text{tr}(M) = \lambda$.

4. Montrer que $M^2 = \lambda M$.

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $M^n = \lambda^{n-1}M$.

21 📖 📍 - On donne le polynôme $P = X^3 - X^2 - 1$

1. Avec une représentation graphique sous Python, conjecturer le nombre de racines de P .

2. Démontrer votre conjecture.

3. Montrer que $V = \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, v_{n+3} = v_{n+2} + v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites définies sur \mathbb{C} .

4. On pose $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On considère l'application $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\phi(v) = U = (v_0, v_1, v_2)$.

a) Montrer que ϕ est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de ϕ . Que peut-on en déduire?

c) Chercher si ϕ est surjective.

d) En déduire la dimension de l'espace vectoriel V .

5. Montrer que la suite $(z^n)_{n \geq 0}$ est un élément de V si et seulement si $P(z) = 0$.

6. Quel(s) théorème(s) sur les polynômes peut-on utiliser pour dire que $P(z) = 0$

admet trois racines complexes distinctes?

22 📖 ⚡ - Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X) = (X^2 - X + 1)^n$.

Probabilités

23 📖 ⚡ - Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les 2 la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. On note M la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.

2. Calculer la probabilité que M soit antisymétrique.

3. Calculer la probabilité que M soit symétrique.

24 📖 ⚡ - On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément trois boules de cette urne et on note X, Y, Z les numéros tirés, de façon que $X < Y < Z$.

1. Déterminer la loi de Y .

2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

25 📖 ⚡ - Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les 2 la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. On note M la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.

2. Même question en supposant cette fois que X et Y suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

26 📖 📍 - On considère une urne avec cinq jetons. Deux jetons sont numérotés 1 et trois jetons sont numérotés 2.

1. On tire, dans un premier temps, 2 jetons simultanément. Montrer que la probabilité de tirer 2 jetons numérotés 2 est égale à $\frac{3}{10}$.

2. On répète cette expérience 2100 fois, en remettant les 2 jetons dans l'urne après chaque expérience. On note la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on tire deux jetons 2.

- Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ et la probabilité $P(X = k)$, $k \in X(\Omega)$.
- Déterminer l'espérance et montrer que la variance est égale à 212.
- Écrire une fonction Python qui prend en paramètre le nombre de tirages et qui renvoie la proportion d'apparition de deux fois le jeton 2.

3. On tire, maintenant, un jeton puis on le remet pour en tirer un deuxième. On note X_1 la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux jetons et X_2 la valeur maximale des deux jetons.

- Présenter la loi conjointe de (X_1, X_2) dans un tableau.
- Calculer l'espérance de la loi de X_1 et de la loi de X_2 .
- Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- Déterminer la covariance de la loi de (X_1, X_2) . Interpréter ce résultat.

27 🏛️ 📍 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n dés à 6 faces équilibrés. Les lancers sont indépendants. On note, pour $1 \leq i \leq n$, X_i le résultat du i -ième lancer. On note M_n (resp. m_n) le plus grand (resp. petit) résultat obtenu sur les n lancers.

- Quelle est la loi de X_i ? Rappeler son espérance et sa variance.
- Soit $k \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Exprimer, en fonction de k , les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X_i \geq k), \quad \mathbb{P}(M_n \geq k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(m_n \geq k).$$

- Montrer que M_n et $7 - m_n$ ont même loi.
- Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(m_n)$.
- Montrer que $\text{Cov}(M_n, m_n) = -\frac{1}{2}(V(M_n) + V(m_n))$.
- Déterminer les variances $V(M_n)$ et $V(m_n)$.
- Question Python.

a) Écrire une fonction `lancer(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie un couple, dont la première (resp. seconde) composante est le plus grand (resp. petit) résultat obtenu après n lancers de dés.

b) Exprimer M_{n+1} en fonction de M_n et X_n . Même chose pour m_{n+1} .

c) En déduire une fonction **récursive** `lancer2(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie un couple, dont la première (resp. seconde) composante est le plus grand (resp. petit) résultat obtenu après n lancers de dés.

Espaces euclidiens

28 🏛️ ⚡ - On considère le plan \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique. On note D la droite d'équations $x = y = z$.

- Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur D .
- Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $u = (1, 1, 1)$.

29 📖 📍 - On note E_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes pairs et E_1 celui des polynômes impairs.

- Rappeler la définition d'une fonction paire, impaire.
- Donner la forme d'un polynôme pair, d'un polynôme impair.
- On pose $\langle P | Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t) Q(\cos t) dt$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que E_0 et E_1 sont orthogonaux pour ce produit scalaire.
- On définit la suite de polynômes $(T_n)_n$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour $n \geq 2$, $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$. Calculer T_2 et T_3 .
- Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant la liste des coefficients de T_n .
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
- Montrer que la famille (T_n) est orthogonale pour le produit scalaire précédemment défini.
- Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.