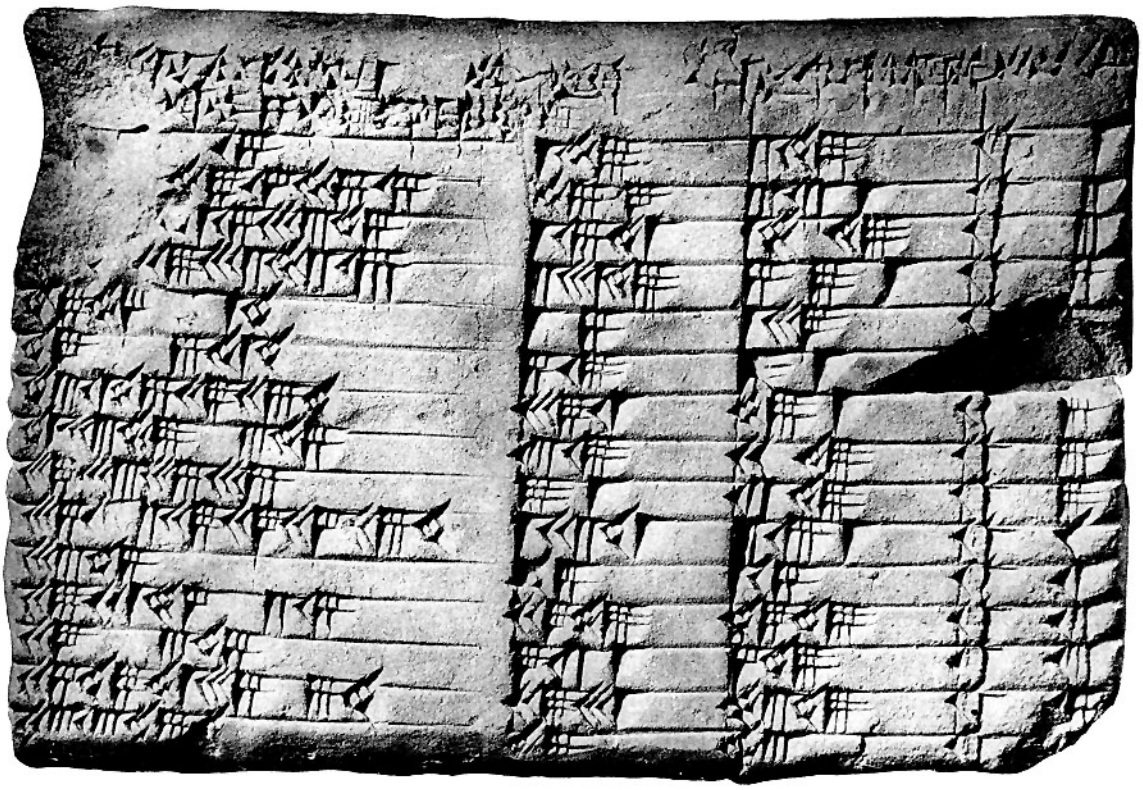
Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 11 — 23 juin 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 1.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 1.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 1.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 1.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 1.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

► Réponses et corrigés page 27

Fiche de calcul n° 2

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 2.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 2.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big) - (2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 2.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 2.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a \neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 2.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Calcul 2.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

► Réponses et corrigés page 28

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 3.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0{,}125$ ....

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 3.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\frac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ .....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\frac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 3.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$ ....

Calcul 3.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$. ....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 3.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 2}$ ....

Calcul 3.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4})-\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln\mathrm{e}^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 3.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 3.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 3.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2} f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2} f(x^2 - 2x)$ ....

d) $x f'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 3.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

► Réponses et corrigés page 30

Fiche de calcul n° 4 **008A**

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 4.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 4.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 4.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 4.4 — **Avec des fonctions composées** — ***bis.***

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 4.5 — **Avec des quotients.**

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 4.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 4.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

▶ Réponses et corrigés page 32

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 5.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 5.2 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 5.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 5.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ......

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ......

Dérivation

Calcul 5.5 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ......

Calcul 5.6 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

► Réponses et corrigés page 35

Fiche de calcul n° 6

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 6.1

Simplifier :

a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}$ ....

c) $\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{3\pi}{4} + \tan\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\frac{4\pi}{3} - \sin^2\frac{4\pi}{3}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 6.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 6.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$) ....

b) $\cos\frac{\pi}{12}$ ....

c) $\sin\frac{\pi}{12}$ ....

d) $\tan\frac{\pi}{12}$ ....

Calcul 6.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Formules de duplication

Calcul 6.5

En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$ ....

b) $\sin \frac{\pi}{8}$ ....

Calcul 6.6

a) Simplifier : $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 6.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ ......

d) $\tan x = -1$ ....

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ....

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ......

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ......

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$ ....

Inéquations trigonométriques

Calcul 6.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$ ....

c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ ....

d) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$ ....

e) $\tan x \geqslant 1$ ....

f) $|\tan x| \geqslant 1$ ....

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

► Réponses et corrigés page 38

Fiche de calcul n° 7

Calcul matriciel

Prérequis

Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 7.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 7.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 7.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \qquad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

On rappelle que $\binom{i}{j} = 0$ quand $j > i$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $A \times C$ ....

Calcul 7.4 — Deux calculs plus difficiles.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ....

b) $\left[C^2\right]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 7.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

d) D ...

g) G ...

b) B ...

e) E ...

h) H ..

c) C ...

f) F ...

i) J ...

Calcul 7.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.

Soit λ un paramètre réel. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

► Réponses et corrigés page 41

Fiche de calcul n° 8

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 8.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 8.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 8.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 8.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 8.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 8.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ....

Calcul 8.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

► Réponses et corrigés page 46

Fiche de calcul n° 9

0026A

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

Vecteurs

Calcul 9.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ....

g) $u : x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ ....

Calculs de rangs

Calcul 9.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 9.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et applications linéaires

Calcul 9.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x,y) \mapsto (x+y, 3x-5y)$, $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$. ....

b) $f : (x,y) \mapsto (x+y, 3x-5y)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(1,0)\big)$. ....

c) $f : (x,y) \mapsto (2x+y, x-y)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(3,4)\big)$ ....

d) $f : (x,y,z) \mapsto (x+y, 3x-z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\big)$ ....

e) $f : P \mapsto P(X+2)$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ....

Calcul 9.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$. ....

▶ Réponses et corrigés page 51

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Puissances

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{10^8}$

1.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

1.1 c) .... $\boxed{10^2}$

1.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

1.1 e) .... $\boxed{10^4}$

1.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

1.2 a) .... $\boxed{15^4}$

1.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

1.2 c) .... $\boxed{2^7}$

1.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

1.2 e) .... $\boxed{3^5}$

1.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

1.3 a) ...... $\boxed{2^{-4} \cdot 3^{-1}}$

1.3 b) .... $\boxed{2^{21} \cdot 3}$

1.3 c) .... $\boxed{2}$

1.3 d) .... $\boxed{2^{38} \cdot 3^{26}}$

1.4 a) .... $\boxed{8}$

1.4 b) .... $\boxed{11}$

1.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

1.4 d) .... $\boxed{2^6 \cdot 5}$

1.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

1.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

1.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

1.3 a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$.

1.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1+2) = 2^{21} \cdot 3$.

1.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \dfrac{(3+1) \cdot 3^{21}}{(3-1) \cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

1.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}$.

1.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8$.

1.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \dfrac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \dfrac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11$.

1.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}$.

1.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \dfrac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \dfrac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5$.

1.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2 + x - 2x + 2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2 - x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

1.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x - 4 - x - 2 + 8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

1.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2 - x} + \dfrac{x^3}{x^3 + x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3 - x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2 - 2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

1.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 2. Calcul littéral

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

2.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

2.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

2.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

2.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

2.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

2.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

2.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

2.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

2.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

2.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

2.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

2.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

2.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

2.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

2.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

2.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

2.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

2.4 c) .... $\boxed{(x + 1)(x + 2)}$

2.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \dfrac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \dfrac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$

2.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \dfrac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \dfrac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$

2.4 f) .... $\boxed{-5(x - 1)\left(x - \dfrac{1}{5}\right)}$

2.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

2.5 b) .... $\boxed{3(14x + 3y)(-4x + y)}$

2.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

2.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

2.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

2.5 f) .... $\boxed{(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)}$

2.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$

2.6 b) .... $\boxed{-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)}$

2.6 c) .... $\boxed{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$

2.6 d) .... $\boxed{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

2.6 e) .... $\boxed{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)}$

Corrigés

2.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

2.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

2.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)(x^2 - x + 1)\right] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

2.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

2.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

....

2.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

2.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

2.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2 = \ldots$

....

2.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2 - \dfrac{37}{36}\right]$.

....

2.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{233}{16}\right]$.

....

2.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2 - \dfrac{4}{25}\right]$.

....

2.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

....

2.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

2.6 a) On calcule $x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

....

2.6 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

....

2.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \left(x^2+1\right)-x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

2.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 3. Exponentielle et logarithme

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

3.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

3.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

3.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln 2}$

3.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

3.1 f) .... $\boxed{2\ln 2+2\ln 3}$

3.2 a) .... $\boxed{-\ln 3-2\ln 2}$

3.2 b) .... $\boxed{2\ln 3-2\ln 2}$

3.2 c) .... $\boxed{\ln 3+11\ln 2}$

3.2 d) .... $\boxed{3\ln 5+2\ln 2}$

3.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5+4\ln 2}$

3.2 f) .... $\boxed{2\ln 5-2\ln 2}$

3.3 .... $\boxed{-2\ln 2-2\ln 5}$

3.4 a) .... $\boxed{\dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

3.4 b) .... $\boxed{17+12\sqrt{2}}$

3.4 c) .... $\boxed{0}$

3.4 d) .... $\boxed{0}$

3.5 a) .... $\boxed{8}$

3.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

3.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

3.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

3.5 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

3.5 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

3.6 a) .... $\boxed{-2}$

3.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\ln 2}}$

3.6 c) .... $\boxed{-17}$

3.6 d) .... $\boxed{1}$

3.6 e) .... $\boxed{-1}$

3.6 f) .... $\boxed{e}$

3.7 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

3.7 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

3.7 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

3.7 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

3.8 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

3.8 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

3.8 c) .... $\boxed{1}$

3.8 d) .... $\boxed{\text{-1}}$

3.9 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

3.9 b) .... $\boxed{\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$

3.9 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

3.9 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{1+x}}$

3.9 e) .... $\boxed{(1+x)^x}$

3.10 a) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{\ln 12+5}{3}}$

3.10 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

3.10 c) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{2}{e}}$

3.10 d) .... $\boxed{x \geqslant -\dfrac{1}{12}}$

3.10 e) .... $\boxed{\varnothing}$

3.10 f) .... $\boxed{\dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

3.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

....

3.1 c) On a $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

....

3.1 e) On a $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

....

3.2 c) On a $0{,}875 = \dfrac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3+\ln 7) + 2(\ln 2+\ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3\times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

....

3.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

3.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4\ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4\ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4\ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

3.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

3.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

3.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

3.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

3.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

3.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

Fiche n° 4. Dérivation

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{6x^2 + 2x - 11}$

4.1 b) .... $\boxed{5x^4 - 6x^2 + 4x - 15}$

4.1 c) .... $\boxed{(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)}$

4.1 d) .... $\boxed{(6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}}$

4.2 a) .... $\boxed{5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)}$

4.2 b) .... $\boxed{4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)}$

4.2 c) .... $\boxed{8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4}$

4.2 d) .... $\boxed{-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))}$

4.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x^2 + 1}}$

4.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

4.3 c) .... $\boxed{(-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x)}$

4.3 d) .... $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

4.4 a) .... $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)}$

4.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2}\sin\left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)}$

4.4 c) .... $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

4.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x + 3)(2\sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 3)^2}}$

4.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}}$

4.5 c) .... $\boxed{-2\dfrac{(x^2 + 1)\sin(2x + 1) + x\cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{(4x + 3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

4.6 a) .... $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

4.6 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}}$

4.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{1 - x^2}}$

4.6 d) .... $\boxed{\dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}}$

4.7 a) .... $\boxed{\dfrac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}}$

4.7 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{x + 1}\left(x + \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)}$

4.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\dfrac{x^2}{(x + 1)^2}}$

4.7 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{x(1 - \ln(x))^2}}$

Corrigés

4.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

4.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

4.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2)\exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

4.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1)\ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \dfrac{1}{x - 2} = (6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}$.

4.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

4.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

4.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4. \end{aligned}$$

4.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x)-78\cos^3(x)-9\sin(x)+51\cos(x)$.

4.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

4.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

4.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x)+(2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x) \\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x). \end{aligned}$$

4.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

4.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\times\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3+4x-4x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big). \end{aligned}$$

4.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big). \end{aligned}$$

4.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

4.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

4.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

4.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

4.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

4.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

4.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

4.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\
&= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

4.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

4.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

4.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4-4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

4.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

4.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 5. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

5.1 b) .... $\boxed{2}$

5.1 c) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

5.1 d) .... $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

5.1 e) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

5.1 f) .... $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

5.2 a) .... $\boxed{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

5.2 b) .... $\boxed{1}$

5.2 c) .... $\boxed{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

5.2 d) .... $\boxed{\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

5.3 a) .... $\boxed{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

5.3 b) .... $\boxed{\left\{0; \frac{1}{2}\right\}}$

5.3 c) .... $\boxed{1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

5.3 d) .... $\boxed{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

5.4 a) .... $\boxed{1}$

5.4 b) .... $\boxed{0}$

5.4 c) .... $\boxed{\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

5.4 d) ... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

5.4 e) .. $\boxed{\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

5.4 f) .... $\boxed{1}$

5.5 a) ..... $\boxed{x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x}$

5.5 b) .. $\boxed{x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

5.5 c) .... $\boxed{x \mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

5.5 d) .. $\boxed{x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.}$

5.6 a) .... $\boxed{x \mapsto 0}$

5.6 b) .... $\boxed{x \mapsto 0}$

Corrigés

5.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

5.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

5.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{6}.$

5.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

5.2 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}.$

5.2 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1.$

5.2 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}.$

5.2 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9)$$
$$\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.$$

5.3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \Leftrightarrow$ $x \ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

....

5.3 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

....

5.3 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

5.3 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1+4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

5.4 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

5.4 b) Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

5.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

5.4 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

5.4 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

5.5 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

5.5 c) On écrit que $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$.

5.5 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\,\arccos(x)^2}.$$

5.6 a) La fonction est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

5.6 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Fiche n° 6. Trigonométrie

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{0}$

6.1 b) .... $\boxed{0}$

6.1 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

6.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

6.2 a) .... $\boxed{0}$

6.2 b) .... $\boxed{-\sin x}$

6.2 c) .... $\boxed{2\cos x}$

6.2 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

6.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

6.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

6.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

6.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$

6.4 a) .... $\boxed{-\sin x}$

6.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

6.4 c) .... $\boxed{0}$

6.4 d) .... $\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$

6.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

6.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

6.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

6.6 b) .... $\boxed{2}$

6.6 c) .... $\boxed{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$

6.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

6.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

6.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

6.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

6.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

6.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

6.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

6.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

6.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

6.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

6.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

6.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

6.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

6.7 g) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

6.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

6.7 h) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

6.7 h) $\boxed{\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 i) $\boxed{\left\{\frac{\pi}{7},\frac{13\pi}{7}\right\}}$

6.7 i) $\boxed{\left\{-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right\}}$

6.7 i) $\boxed{\left\{\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.7 j) $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\}}$

6.7 j) $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right\}}$

6.7 j) $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.8 a) $\boxed{\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right]}$

6.8 a) $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]}$

6.8 b) $\boxed{\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]}$

6.8 b) $\boxed{\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]}$

6.8 c) $\boxed{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},2\pi\right]}$

6.8 c) $\boxed{\left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]}$

6.8 d) $\boxed{\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]}$

6.8 d) $\boxed{\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]}$

6.8 e) $\boxed{\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[}$

6.8 e) $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[}$

6.8 f) $\boxed{\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]}$

6.8 f) $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]}$

6.8 g) $\boxed{\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]}$

6.8 g) $\boxed{\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]}$

6.8 h) $\boxed{\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{15\pi}{8},2\pi\right]}$

6.8 h) $\boxed{\left[-\pi,-\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right]}$

Corrigés

6.3 b) On peut utiliser $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

6.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

6.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x)&=\cos(2x+x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos x\sin^2 x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

6.5 a) On a $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

6.5 b) On a $\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

6.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$.

6.6 b) On a $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x\cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 2$.

6.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

6.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

6.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

6.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

6.7 j) On a $\cos\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{14}$.

6.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

6.8 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

6.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

6.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 7. Calcul matriciel

Réponses

7.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

7.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

7.1 c) 17 (matrice 1×1)

7.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

7.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

7.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

7.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

7.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

7.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

7.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

7.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

7.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

7.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

7.2 i) $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

7.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

7.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

7.2 l) $n^{k-1}D$

7.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

7.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

7.3 c) $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

7.3 d) $\binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$

7.4 a) $2^{i-j}\binom{i-1}{j-1}$

7.4 b) $\begin{aligned} &(1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) \\ &+(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}) \end{aligned}$

7.5 a) $\frac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

7.5 b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

7.5 c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

7.5 d) $\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7.5 e) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7.5 f) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

7.5 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

7.5 h) .... $\boxed{\text{Non inversible !}}$

7.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

7.6 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

7.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

7.6 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

7.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

7.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

7.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

7.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1, 2)$ est égal à k.

....

7.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

....

7.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

....

7.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4 + 5 = 9$, pour A^3, $8 + 19 = 27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

....

7.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

....

7.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

....

7.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

....

7.2 l) La conjecture est alors évidente.

....

7.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \quad \text{en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

7.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

7.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned}
[B^\top \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} \\
&= \frac{4}{9} 3^{i+j} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4 \times 3^{i+j}}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

7.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

7.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \qquad \text{(en posant } \ell = k-j\text{)} \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

7.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n = 4 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ n = 5 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} [C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k+1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k+1}\delta_{k,j-1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k-1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k-1}\delta_{k,j-1}. \end{aligned}$$

Si $(i,j) \notin \{1,n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1} + 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .
Sinon, pour (i,j) quelconque dans $[\![1,n]\!]^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1} = 0 = \delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n.

7.5 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

7.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2/2 \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \\ \\ \end{array} \end{aligned}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

7.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7.5 h) On remarque que $L_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_4$.

7.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda) L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

....

Fiche n° 8. Systèmes linéaires

Réponses

8.1 a) .... $\{(3,1)\}$

8.1 b) .... $\{(7,2)\}$

8.1 c) .... $\left\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right\}$

8.1 d) .... $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$

8.2 a) .... $\left\{(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a)\right\}$

8.2 b) .... $(2,-3)$

8.2 c) .... $\left\{(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2)\right\}$

8.2 d) .... $(a-2a^2,a+a^2)$

8.3 a) .... $\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}$

8.3 b) .... $\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}$

8.3 c) .... $\left\{(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z);z\in\mathbb{R}\right\}$

8.3 d) .... $\left\{(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x);x\in\mathbb{R}\right\}$

8.4 a) .... $\{(2,-1,3)\}$

8.4 b) .... $\{(-1,4,2)\}$

8.4 c) .... $\varnothing$

8.4 d) .... $\left\{(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z)\,;\,z\in\mathbb{R}\right\}$

8.5 a) .... $\{(1,1/2,1/2)\}$

8.5 b) .... $\varnothing$

8.5 c) .... $\{(5z,1-4z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}$

8.5 d) .... $\left\{(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})\right\}$

8.6 a) .... $\{(5,3,-1)\}$

8.6 b) .... $\varnothing$

8.6 c) .... $\left\{(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a+1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c)\right\}$

8.7 a) .... $\{(0,0,0)\}$

8.7 b) .... $\{(x,y,-x-y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

8.7 c) .... $\{(x,x,x)\,;\,x\in\mathbb{R}\}$

Corrigés

8.1 a) On calcule :

$$\begin{cases}x-2y=1\\3x+4y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2y\\3(1+2y)+4y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2y\\10y+3=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y=10\\x=1+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=3\end{cases}$$

8.1 b) On calcule : $\begin{cases}2x+y=16\\x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=16-2x\\x-16+2x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=5+16=21\\y=16-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=16-14=2\end{cases}$

8.1 c) On calcule : $\begin{cases}3x-6y=-3\\2x+2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-1\\x+y=1\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-2y=-1\\3y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}\\x=-1+2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}$

8.1 d) On calcule :

$$\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\6x+2y=3\sqrt{2}\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\10y=5\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{2}\\3x=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{2}\\x=\frac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

8.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

....

8.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{cases}$$

$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\dfrac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{cases}$$

....

8.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

....

8.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

....

8.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

....

8.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

....

8.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{cases}$$

....

8.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

....

8.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

8.4 b) On calcule :

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

8.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

8.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

8.5 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases}$$

8.5 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=5$ n'a pas de solution.

8.5 c) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases}.$$

8.5 d) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{array}\right.$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6) = -(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-y+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{a+2} \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \end{array}\right.$

....

8.6 a) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{array}\right.$$

....

8.6 b) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{array}\right.$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

....

8.6 c) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} x-az=c \\ a\,x-y=c \\ a\,y-z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ a\,y-z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a\big((a-1)c+a^2z\big)-z=c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{array}\right.$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3-1=0$ a pour unique solution $a=1$ (fonction $t\mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a\neq 1$, donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\left\{\begin{array}{l} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{array}\right.$$

....

8.7 a) On calcule :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3\times(-3x-y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

....

8.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x + y + z = 3x \\ x + 4y + z = 3y \\ x + y + 4z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -x - y$

8.7 c) On calcule :

$$\begin{cases} 4x + y + z = 6x \\ x + 4y + z = 6y \\ x + y + 4z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ x - 2y + 2x - y = 0 \\ x + y - 2 \times (2x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x - x = x \end{cases}$$

Fiche n° 9. Algèbre linéaire

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

9.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

9.1 c) .... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

9.1 d) .... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

9.1 e) .... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

9.1 f) .... $\boxed{(0,2,4,1)}$

9.1 g) .... $\boxed{(1/2, -\sqrt{3}/2)}$

9.2 a) .... $\boxed{2}$

9.2 b) .... $\boxed{1}$

9.2 c) .... $\boxed{1}$

9.2 d) .... $\boxed{2}$

9.2 e) .... $\boxed{2}$

9.2 f) .... $\boxed{1}$

9.3 a) .... $\boxed{2}$

9.3 b) .... $\boxed{2}$

9.3 c) .... $\boxed{3}$

9.3 d) .... $\boxed{4}$

9.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

9.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

9.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

9.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

9.4 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

9.5 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

9.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigés

9.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

....

9.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

....

9.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

....

9.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

....

9.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

....

9.1 f) Notons $u = \lambda + \mu X + \nu X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$.

En évaluant en 0, $\lambda = 0$.

En évaluant en 1, $\mu = 2$.

En évaluant en 2, $2\mu + 2\nu = 8 + 4 = 12$ soit $\nu = 4$.

En identifiant les coefficients de X^3 dans chacun des membres, $1 = \delta$.

Finalement, $u = 2X + 4X(X-1) + X(X-1)(X-2)$.

....

9.1 g) En utilisant les formules d'addition, $u(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

....

9.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

....

9.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

9.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

9.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

....

9.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

....

9.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

....

9.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

....

9.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

....

9.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

....

9.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

....

9.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

....

9.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

9.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

....

9.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

9.4 e) Comme $f(1) = 1$, $f(X) = X + 2$ et $f(X^2) = (X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

9.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

....

9.5 b) Comme $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, $f(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$ et $f(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

....