

Consignes : 3 niveaux de difficulté pour ce DM. Tous les étudiants doivent traiter et rendre le niveau ☆. Les niveaux ☆☆ et ☆☆☆ sont facultatifs.

☆ : Parties I et II. *Obligatoire.*

☆☆ : Tout sauf IV. *Fortement conseillé.*

☆☆☆ : Tout. *Pour les 5/2 et les meilleurs étudiants.*

On considère les fonctions cosh, sinh et th définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Partie I- Généralités sur cosh et sinh.

Q1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) > 0$ et en déduire que th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

Q3. Justifier que cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées à l'aide de cosh et sinh.

Q4. Déterminer les limites de cosh et sinh en $+\infty$ et $-\infty$.

Q5. Dresser le tableau de variations de sinh. *On rappelle que $\cosh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Q6. Dresser le tableau de variations de cosh. *On pourra justifier puis utiliser que $\sinh(x) > 0 \iff x > 0$.*

Q7. Rappeler le développement limité de exp à l'ordre 3 en 0 et en déduire que quand $x \rightarrow 0$,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } \sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Partie II- Étude approfondie de th.

Q8. Montrer que th est une fonction impaire.

Q9. Déterminer les limites de th en $+\infty$ et $-\infty$.

Q10. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

Q11. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}^2(x) < 1$ et en déduire que th est strictement croissante.

Q12. En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.

Partie III- Réciproque de th

Dans la suite, on note $\operatorname{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de th.

Q13. Justifier que argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Q14. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}.$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

Partie IV- Réciproque de th - bis

Dans cette partie, on cherche à retrouver l'expression de th à l'aide d'une autre méthode. On rappelle que si $f : E \rightarrow F$ est une bijection, alors pour $x \in E$ et $y \in F$, on a l'équivalence

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Q16. Soit $y \in]-1, 1[$. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et retrouver l'expression de $\operatorname{argth}(y)$. On pourra poser $X = e^x$.