

Programme de khôlle. Semaine 1

Les parties grisées n'ont pas été abordées la semaine précédente et seront abordées au cours de la semaine courante. Un exercice pourra tout de même utiliser ces notions sans les considérer comme du cours.

AL1- Rappels d'algèbre linéaire et compléments sur les matrices

- 1) **Rappels de définition et exemples** : sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, espace vectoriel engendré, famille libre, famille génératrice, base, rang d'une famille.
- 2) **Rappels sur les sev de $\mathbb{K}^n$** : Déterminer une base d'un sev de $\mathbb{K}^n$ de la forme $AX = 0$. Déterminer une base et un système d'équations d'un espace vectoriel engendré ou de $\text{Im } A$.
- 3) **Rappels sur les applications linéaires.**
 - Définition d'une application linéaire. Endomorphisme. Isomorphisme. Automorphisme.
 - Noyau. Image. Formule du rang. Caractérisation de l'injectivité par le noyau.
 - Caractérisation de la bijectivité par l'image d'une base et cas de la dimension finie (injectif $\iff$ bijectif $\iff$ surjectif quand $\dim E = \dim F$)
 - Composition. Notation f^n .
- 4) **Rappels sur le changement de base.**
 - Matrice d'une application linéaire dans des bases. Matrice d'un endomorphisme. Le rang de la matrice est le rang de l'application linéaire. Rappel de la formule $Y = AX$.
 - Matrice de passage. Définition. Cas particulier de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ au départ.
 - Formule $X = PX'$.
 - Formules $B = Q^{-1}AP$ et $B = P^{-1}AP$.
- 5) **Compléments sur les matrices.**
 - 1) Trace.
 - Trace d'une matrice. La trace est linéaire.
 - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace.
 - Trace d'un endomorphisme. Exemple de la trace de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$.
 - 2) Transposée.
 - Définition. La transposition est linéaire.
 - Propriétés. Transposée d'un produit, de l'inverse. $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
 - $\text{tr}(AA^T) = 0 \iff A = 0$.
 - 3) Matrices symétriques et antisymétriques.
 - $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev. Calcul de leurs dimensions.
 - Une matrice antisymétrique a ses coeff diagonaux nuls.
 - 4) Polynôme d'une matrice.
 - Définition de $P(A)$ si $P \in \mathbb{K}[X]$.
 - Si $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$ alors A est inversible et A^{-1} s'exprime en fonction de A . Exemple : $P^3 = I_2$.

Questions flash - 6 pts

Calcul pratique de noyau ou d'image : $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ étant une matrice de taille raisonnable ($n, p \leq 4$) au choix du kholleur, l'étudiant devra

- Déterminer une base de $\ker A$ et sa dimension.
- Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg}(A)$.

Questions de cours - 6 pts

Le khôlleur fera ensuite son marché dans l'un des paniers

- **Panier 1** : On considère l'application

$$u : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0), P''(0)) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que u est un isomorphisme.

- **Panier 2** :

1. Montrer que la trace $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Panier 3** : Montrer que la famille suivante est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$(X(X+1), X^2-1, X(X-1)).$$

- **Panier 4** :

1. Montrer que la transposition $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire.
2. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice au choix - Notation libre

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.