

On considère les fonctions cosh, sinh et th définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \text{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Partie I- Généralités sur cosh et sinh.

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\cosh(x) > 0$. Le dénominateur du quotient définissant th ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Q3. cosh et sinh sont dérivables comme sommes de fonctions dérivables et l'on a pour $x \in \mathbb{R}$, $\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$. De même, $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

Q4. Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2} \rightarrow +\infty, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2} \rightarrow +\infty.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$, $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \frac{e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim -\frac{e^{-x}}{2} \rightarrow -\infty.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty.$$

Q5. sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\sinh(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\sinh'(x)$	+	
$\sinh(x)$	$-\infty$	$+\infty$
	↗ 0	

Q6. cosh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Or $\sinh(x) > 0 \iff x > 0$, $\sinh(x) < 0 \iff x < 0$, $\sinh(0) = 0$. Donc cosh est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\cosh(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sinh(x)$	-	0	+
$\cosh'(x)$	-	0	+
$\cosh(x)$	$+\infty$	↘ ↗ 1	$+\infty$

Q7. Le DL de exp en 0 à l'ordre 3 est $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$. Alors $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right) + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3), \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right) + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Partie II- Étude approfondie de th.

Q8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\text{th}(x)$, donc th est impaire.

Q9. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\sinh(x) \sim \frac{e^x}{2}$, $\cosh(x) \sim \frac{e^x}{2}$, donc $\text{th}(x) \rightarrow 1$. Par imparité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$. Ainsi $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$ et $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$.

Q10. $\text{th} = \frac{\sinh}{\cosh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec $\cosh(x) \neq 0$.

$$\text{th}'(x) = \frac{\sinh'(x) \cosh(x) - \sinh(x) \cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$$

$$\text{Donc } \text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x).$$

Q11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sinh(x) < \cosh(x)$ car $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ (puisque $-e^{-x} < e^{-x}$). Ainsi

$$\text{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} < 1.$$

Par imparité de th , on a également $\text{th}(-x) = -\text{th}(x)$, donc si $\text{th}(x) < 1$ alors $-\text{th}(x) > -1$, c'est-à-dire $\text{th}(-x) > -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}(x) < 1$, soit $\text{th}^2(x) < 1$. Donc $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Q12. th est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

Partie III- Réciproque de th

Q13. $\text{argth} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de th , dérivable sur $] -1, 1[$ car th est dérivable et $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in] -1, 1[$, posons $y = \text{argth}(x)$, alors $\text{th}(y) = x$ et

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(y)} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$\text{Ainsi } \text{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Q14. On décompose $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En multipliant par $1-x^2$: $1 = a(1+x) + b(1-x) = (a+b) + (a-b)x$. Par identification : $a+b = 1$, $a-b = 0$, soit $a = b = \frac{1}{2}$.

Q15. Pour $x \in] -1, 1[$,

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

On intègre : $\text{argth}(x) = \frac{1}{2} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$. Or

$$\text{argth}(0) = 0, \text{ donc } C = 0. \text{ Ainsi } \text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Partie IV- Réciproque de th - bis

Q16. Soit $y \in] -1, 1[$. Résolvons $\text{th}(x) = y$, i.e. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$. En posant $X = e^x > 0$, on a $\frac{X-1/X}{X+1/X} = y$, soit $\frac{X^2-1}{X^2+1} = y$. Alors $X^2 - 1 = y(X^2 + 1) \iff X^2(1-y) = 1+y \iff X^2 = \frac{1+y}{1-y}$. Comme $y \in] -1, 1[$, $\frac{1+y}{1-y} > 0$, donc $X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Ainsi

$$x = \ln X = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right). \text{ On retrouve } \text{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$