

Consignes : 3 niveaux de difficulté pour ce DM. Tous les étudiants doivent traiter et rendre le niveau ☆. Les niveaux ☆☆ et ☆☆☆ sont facultatifs.

☆ : Parties I *Obligatoire*.

☆☆ : Partie I et II. *Fortement conseillé*.

☆☆☆ : Tout. *Pour les 5/2 et les meilleurs étudiants*.

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le commutant de A , noté ici C_A , comme étant l'ensemble des matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$C_A = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}.$$

Partie I- Généralités et exemples

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2. Déterminer le commutant de I_n, C_{I_n} .

Q3. Dans cette question, on considère le cas $n = 2$ et on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a, b, c et d , a-t-on $B \in C_J$?

b) En déduire une base de C_J et sa dimension.

Q4. Dans cette question, on considère le cas $n = 2$ et on considère une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$.

a) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a, b, c et d , a-t-on $B \in C_D$?

b) En déduire une base de C_D et sa dimension.

Partie II- Commutants de deux matrices semblables

On revient au cas général. On considère deux matrices semblables A_1 et A_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc que $A_1 = PA_2P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q5. Montrer que l'application $\Phi_P : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}BP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un automorphisme.

Q6. Montrer que $\Phi_P(C_{A_1}) = C_{A_2}$.

Q7. Comparer alors $\dim C_{A_1}$ et $\dim C_{A_2}$.

Partie III- Commutant d'une matrice diagonale

Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale où les **coefficients diagonaux sont 2 à 2 distincts**.

Q8. Montrer que C_D est exactement l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q9. Quelle est donc sa dimension ?

Q10. Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $P(D)$ la matrice $\sum_{k=0}^p a_k D^k$.

a) Écrire la matrice $P(D)$ sous forme de matrice diagonale.

b) Soit Δ une matrice diagonale. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Delta = P(D)$. On pourra utiliser les *polynômes d'interpolation de Lagrange*.

c) En déduire que $C_D = \{P(D), P \in \mathbb{C}[X]\}$.