

Chapitre AL1 : Rappels d'algèbre linéaire et compléments sur les matrices

1 Rappels de définitions

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on fixe un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- **Sous-espaces vectoriels** : Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :
 - $0 \in F$;
 - Stabilité par combinaison linéaire : $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$.
- **Combinaison linéaire et espace vectoriel engendré** : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ des éléments de E . On appelle combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$ tout élément x de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_p$ est noté $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. C'est un sous-espace vectoriel de E , appelé espace vectoriel engendré par la famille $(x_1, \dots, x_p)$.
- **Droites** : Si x est un vecteur non nul de E , l'espace vectoriel $\text{Vect}(x)$ est appelé une droite vectorielle. C'est la droite engendrée par x . On la note parfois $\text{Vect}(x)$.
- **Familles de vecteurs** : Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille d'éléments de E . On dit que cette famille est :
 - **libre** si la seule combinaison linéaire nulle est celle où tous les scalaires sont nuls.
 - **génératrice** si $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$.
 - **une base** si elle est libre et génératrice.
- **Dimension** : On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Dans ce cas, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Par définition, la dimension de E , noté $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) est le nombre d'éléments d'une base de E .
- **Rang d'une famille** : Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de E . On appelle rang de cette famille la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, noté $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

Espaces de référence et bases canoniques à connaître

Espaces	Base canonique	Dimension
$\mathbb{K}^n$	$(e_1, \dots, e_n)$ avec $e_i =$	
$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$		
$\mathbb{K}_n[X]$	$(1, X \dots X^n)$	

PROPOSITION 1 — On suppose que E est de dimension finie n et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de E . On note $r = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$. On a :

- $r \leq \min(n, p)$
- $r = n \iff (x_1, \dots, x_p)$ est génératrice.
- $r = p \iff (x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Dans le cas où $n = p$, on a donc l'équivalence, libre $\iff$ génératrice $\iff$ base $\iff r = n$.



Exercice 1.

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, décrire l'espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que l'ensemble des matrices scalaires est une droite vectorielle.
4. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrer que la famille $(X(X-1), X(X+1), X^2-1)$ est libre, puis que c'est une base.
5. Dans $E = \mathbb{R}^3$, déterminer le rang de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2 Rappels sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

n désignera un entier naturel non nul. Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ seront identifiés aux matrices colonne de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ peut-être présenté de deux façons :

- Avec une famille génératrice (ou une base) : $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
- Avec un système d'équations : $F = \ker A = \{X \in \mathbb{K}^n, AX = 0\}$.

Il faut savoir passer d'une représentation à l'autre.

2.1 Systèmes d'équations

Si $A \in \mathcal{M}_{pn}$, le système $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Déterminer une base de $\ker A$, c'est résoudre le système $AX = 0$.

Pour ce faire, il faut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss (voir cours de TSI1). On rappelle que le nombre de pivots est par définition le rang de la matrice. Les paramètres seront les inconnues secondaires du système échelonné : leur nombre correspond alors à la dimension de $\ker A$. On retrouve notamment le **théorème du rang** :

$$\dim \ker A + \text{rg}(A) = n = \dim \mathbb{K}^n.$$

Exercice 2.

Déterminer une base de $\ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.2 Présentation sous forme de Vect



Savoir-faire.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et A la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ (en colonne).

- Si cette famille n'est pas libre, il faut savoir **construire une base** de F . Pour cela :
 - On échelonne A **en colonnes** ;
 - Les colonnes non nulles fournissent une base de F .
- Il faut savoir déterminer un système d'équations de F . Pour cela,

- On considère $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, respectivement les vecteurs colonne des **paramètres** et des **coordonnées**.
- On échelonne le système $AT = X$, d'inconnue T .
- Les équations de compatibilité sont de la forme $0 = f(x_1, \dots, x_n)$ où f est linéaire. **Le système formé par les équations de compatibilité donne un système d'équations de F .**



Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base, puis un système d'équations de $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

3 Rappels sur les applications linéaires

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

3.1 Définitions

Définition.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire si pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in F$,

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaire de E vers F .

Vocabulaire

Cas	Dénomination	Notations de l'ensemble
$E = F$	endomorphisme	$\mathcal{L}(E)$
f inversible	isomorphisme	
f inversible et $E = F$	automorphisme	$\text{GL}(E)$



Exercice 4.

Montrer que l'application $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (P(0), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire.

Définition.

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- Le **noyau** de f , noté $\ker(f)$, est l'ensemble $\{x \in E, f(x) = 0\} \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel de E .
- L'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble $\{f(x), x \in E\} \subset F$. C'est un sous-espace vectoriel de F .
- Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, le **rang** de f , noté $\text{rg}(f)$ est par définition la dimension de $\text{Im}(f)$.

PROPOSITION 2 — Si E, F, G sont des $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Notations : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{fois}}$ et par convention, $f^0 = \text{Id}_E$.

3.2 Rappels importants

On considère une application $f : E \rightarrow F$ linéaire.

PROPOSITION 3 — Propriétés importantes.

- f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

➤ On suppose à présent que E et F sont de dimension finie.

- Théorème du rang** : $\dim E = \text{rg}(f) + \dim \ker(f)$.
- f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim F$.

➤ On suppose de plus que $\dim E = \dim F$. Cela s'applique en particulier pour le cas $E = F$.

- f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective.
- f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .



Exercice 5.

Montrer que l'application $P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0), P''(0)) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.

4 Rappels sur le changement de base

4.1 Matrice d'une application

Définition.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \rightarrow F$ linéaire. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de F . La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est la matrice dont la j -ième colonne contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. Dans le cas $E = F$ et d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, si l'on prend la même base au départ et à l'arrivée, on appelle simplement matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$, simplement notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Remarque. Le cas d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dans la base canonique est "visuel" et il est d'ailleurs recommandé d'écrire les vecteurs en colonne pour ne pas s'emmêler les pinceaux.

Exemple : La matrice de $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (3x + y, y + z, 3x + 2y + z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique n'est autre que :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

On considère l'endomorphisme $u : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(0) + P(1)X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

PROPOSITION 4 — Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases respectives de ces espaces.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si l'on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, X le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et Y le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$. Alors $Y = AX$.

4.2 Matrice de passage

— Définition. —

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . On définit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, comme étant la matrice qui contient, en colonne, les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit,

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Remarque. Si $E = \mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{B}$ est la base canonique, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre base $\mathcal{B}'$ est très facile ! Il suffit de recopier les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en colonne.

PROPOSITION 5 — Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de E . On a :

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \times P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}.$$

De plus, $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ est inversible et

$$(P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

4.3 Formules de changement de base

On considère E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F .

CHANGEMENT DE BASE - COORDONNÉES DE VECTEURS

Soit $x \in E$. On note X (resp. X') le vecteurs colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Alors

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'.$$

CHANGEMENT DE BASE - APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

CHANGEMENT DE BASE - ENDOMORPHISMES

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Remarque. Cette dernière formule sera très utilisée cette année. Elle se retient facilement (c'est une prise en sandwich!). En notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, elle se réécrit également $B = P^{-1}AP$ ou de manière équivalente $A = PBP^{-1}$. Elle justifie la définition ci-dessous des matrices semblables. Deux matrices semblables représentent donc le même endomorphisme dans des bases différentes.

— *Définition.* —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 7.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, x) \in \mathbb{R}^2$.

On note également $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A de u dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Quelle relation y a-t-il entre A, P et D ?

5 Compléments sur les matrices

Dans la suite, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

5.1 La trace

— *Définition.* —

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit la trace de A , noté $\text{tr}(A)$, comme étant la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\text{tr}(A) = \dots$

$\text{tr}(I_n) = \dots$

PROPOSITION 6 — • L'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.

- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- *Corollaire* : Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. ✎ A rédiger sur votre cahier.

— *Définition.* —

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables donc

$$\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)).$$

Cette valeur commune à toutes les bases de E est appelée la **trace** de f , notée $\text{tr}(f)$.



Savoir-faire.

Pour calculer la trace d'un endomorphisme f , on exprime d'abord sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ choisie. On a alors $\text{tr}(f) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$. Le choix de la base est libre et doit donc si possible rendre les calculs simples.



Exercice 8.

Déterminer la trace de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$:

$$D : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}_n[X].$$

5.2 La transposée

— *Définition.* —

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A , notée A^T (ou parfois tA), comme étant la matrice $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ où pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, $b_{ij} = a_{ji}$. Autrement dit, c'est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exemple. ☞ Donner A^T et B^T pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 7 — Soit n, p, q des entiers naturels non nuls.

- (i) L'application $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ est linéaire.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^T A^T$.
- (iii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
- (iv) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- (v) Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A^T A) = 0$. Alors $A = 0$.

Démonstration. ☞ A rédiger sur votre cahier.

5.3 Matrices symétriques et antisymétriques

— *Définition.* —

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille n .

Exemple. ☞ Donner des exemples de matrices carrées symétriques et antisymétriques de taille 2 et 3.

On notera E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

PROPOSITION 8 — **Propriétés de $S_n(\mathbb{K})$.**

- (i) $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (ii) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $m_{ij} = m_{ji}$.
- (iii) Une base de $S_n(\mathbb{K})$ est obtenue en concaténant les familles $(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ et $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$.
- (iv) $\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. ☞ A rédiger sur votre cahier.

PROPOSITION 9 — **Propriétés de $A_n(\mathbb{K})$.**

- (i) $A_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (ii) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est antisymétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $m_{ij} = -m_{ji}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $m_{ii} = 0$. En particulier, une matrice antisymétrique est de diagonale nulle.
- (iii) Une base de $A_n(\mathbb{K})$ est donnée par la famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$.
- (iv) $\dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration. ☞ A rédiger sur votre cahier.

5.4 Polynôme d'une matrice

— *Définition.* —

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On peut définir la matrice $P(A)$ par la formule

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k.$$

Erreur fréquente.

On rappelle que $A^0 = I_n$ donc si $P(X) = a \in \mathbb{K}$, $P(A) = aI_n$, et pas simplement a , qui n'a pas de sens en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple. Si $P(X) = X^2 - 2X + 3$, alors $P(A) = A^2 - 2A + 3I_n$.

PROPOSITION 10 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$. Alors A est inversible et l'on peut exprimer A^{-1} .

Démonstration.  A rédiger sur votre cahier.

— *Définition.* —

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(A) = 0$. On dit que P est un polynôme annulateur de A .

Exercice 9.

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 3X + 1$. Vérifier que $P(A) = 0$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 . En déduire que B est inversible et calculer B^{-1} .

— *Définition.* —

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente. En effet, on peut vérifier que $J^n = 0$.

— CAYLEY-HAMILTON POUR $n = 2$ - (HP) —

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le polynôme $X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A .

Démonstration.  A rédiger sur votre cahier.



Savoir-faire.

Quelques méthodes de calcul de puissances d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et l'on cherche à calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Cela peut servir dans l'étude de systèmes de suites récurrentes.

- *Méthode artisanale* : Avoir l'intuition d'une formule en testant sur des petites valeurs et la prouver **par récurrence**.
- *Méthode astucieuse* : Décomposer intelligemment la matrice $A = B + C$ avec B et C qui commutent pour appliquer le **binôme de Newton**. Le calcul des puissances de B et C doit être simple (diagonale, nilpotente) : cela ne sera pas toujours possible.
- *Méthode industrielle* : **diagonaliser** (éventuellement) ou trigonaliser la matrice A (voir chapitre AL4).
- *Méthode ingénieuse* : Déterminer un **polynôme annulateur** P de A puis exprimer le reste $R_n(X)$ de la **division euclidienne** de X^n par P . On a alors $A^n = R_n(A)$.



Exercice 10.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que pour $P(X) = X^2 - 3X + 2$, on a $P(A) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P . On pourra évaluer la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ en les deux racines

de P , Q_n désignant le quotient.

3. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.