

Chapitre An1 : Intro. au calcul diff. dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre on s'intéresse à des fonctions f définies sur une partie non vide Ω de $\mathbb{R}^n$. En pratique, vous ne rencontrerez que $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, le cas de $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ étant déjà bien connu.

Exemple.

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2$ et 3

1.1 La distance euclidienne

Définition.

Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Le **produit scalaire euclidien** canonique est défini par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

La **norme euclidienne** du vecteur u est alors définie par

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La **distance euclidienne** entre les vecteurs u et v est définie par

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Remarque.

- La notion de distance est sûrement plus évidente entre deux points : si l'on considère les points A et B tels que $u = \overrightarrow{OA}$ et $v = \overrightarrow{OB}$, la distance $d(u, v)$ n'est autre la norme de $\overrightarrow{AB}$, et donc la distance entre A et B (ou encore, la

longueur du segment $[AB]$. En effet,

$$d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

- La notion du produit scalaire dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est largement étudiée dans le chapitre AL5. Vous pouvez vous y référer pour ce qui est des propriétés du produit scalaire euclidien. Celui-ci est celui qui est utilisé dès la TSI1 en géométrie (du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$) : la distance euclidienne correspond à l'idée que l'on se fait d'une distance dans le plan ou l'espace en mesurant à la règle une distance !

Dans la proposition qui suit, on rappelle les propriétés des normes vues en TSI1 et on déduit les propriétés de la distance qui en découlent.

PROPOSITION 1 — Soit u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Homogénéité :
 - Pour la norme : $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$.
 - Pour la distance : $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$.
2. Séparation :
 - Pour la norme : $\|u\| = 0 \iff u = 0$.
 - Pour la distance : $d(u, v) = 0 \iff u = v$.
3. Inégalité triangulaire :
 - Pour la norme : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
 - Pour la distance : $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

On peut définir la notion de boules dans $\mathbb{R}^n$ grâce à la distance euclidienne :

Définition.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On définit :

- La **boule ouverte** de centre a et de rayon r , notée $B(a, r)$ comme étant l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(a, x) < r$:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) < r\}.$$

- La **boule fermée** de centre a et de rayon r , notée $B_f(a, r)$ comme étant l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(a, x) \leq r$:

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) \leq r\}.$$

Remarque.

- La boule ouverte ne contient pas son "bord", à savoir l'ensemble des points x tels que $d(a, x) = r$, puisque dans la définition il y a un $<$, contrairement à la boule fermée ($\leq$) : c'est en ce sens qu'on peut dire qu'elle est ouverte.
- Pour $n = 1$, la boule ouverte $B(a, r)$ (resp. fermée $B_f(a, r)$) n'est autre que l'**intervalle** $]a - r, a + r[$ (resp. $[a - r, a + r]$).
- Pour $n = 2$, la boule ouverte $B(a, r)$ (resp. fermée $B_f(a, r)$) est usuellement appelée un **disque** ouvert (resp. fermé). Son bord est le cercle de centre a et de rayon r .
- Pour $n = 3$, la boule ouverte $B(a, r)$ (resp. fermée $B_f(a, r)$) est effectivement ce qu'on appelle usuellement une boule, avec son bord ou non. Le bord n'est autre que la **sphère** de centre a et de rayon r .

On définit également la notion de partie bornée de $\mathbb{R}^n$:

— *Définition.* —

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que la partie A est **bornée** s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_f(0, R)$.

Pour vulgariser, une partie bornée est une partie qu'on peut dessiner à l'intérieur d'une grande boule et qui n'a donc pas de "bout à l'infini".

Exemple. 🖋 Dessiner une partie bornée et une partie non bornée.

1.2 Parties ouvertes et parties fermées

On arrive maintenant à une notion très importante en maths, dans un domaine fabuleux que l'on nomme topologie. Mais, rassurez-vous : l'idée qu'il faut s'en faire en TSI est très limitée et son utilisation encore plus.

— *Définition.* —

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que A est une partie **ouverte** si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Remarque. Par convention (ou par quantification sur l'ensemble vide...), la partie vide $\emptyset$ est ouverte.

Ce qui compte, c'est qu'autour de chaque point a de A , il y a de la place pour caler une boule centrée en a , aussi petite soit-elle, qui reste dans A .

On a pour habitude dessiner le bord d'une partie ouverte en **pointillé** pour signifier qu'il s'agit du bord de la partie mais que celui-ci n'est pas dans la partie.

Exemple. 🖋 Dessiner des parties ouvertes et d'autres pas ouvertes.

PROPOSITION 2 — Une boule ouverte est une partie ouverte.

Démonstration. 🖋 A faire sur votre cahier.

— *Définition.* —

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est **fermée** si le complémentaire de A , $\mathbb{R}^n \setminus A$ est une partie ouverte.

Remarque. Vulgairement, un point extérieur à A ne peut pas y entrer : autour de chaque point a qui n'est pas dans A , il y a de la place pour caler une boule centrée en a , aussi petite soit-elle, qui n'intersecte pas A .

Exemple. 🖋 Dessiner des parties fermées et d'autres pas fermées.

PROPOSITION 3 — Les boules fermées sont des parties fermées.

Démonstration. En exercice.



Erreur fréquente.

Il y a des parties ouvertes et des parties fermées. Il y a aussi des parties à la fois ouvertes et fermées, mais elles se font rares : $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$. Il y a aussi (et surtout !) des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées !

En ce qui concerne les exemples que vous rencontrerez, les parties ouvertes sont souvent définies à partir d'inégalités strictes, tandis que les parties fermées sont souvent définies avec des inégalités larges.

Exercice 1.

Dessiner les parties suivantes et compléter le tableau.

Partie	Ouverte	Fermée
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\}$		
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1\}$		
$A \cap B$		

1.3 Intérieur, extérieur, adhérence, frontière

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que

- a est un point **intérieur** à A si $a \in A$ et s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.
- a est **extérieur** à A si a est un point intérieur du complémentaire de A .
- a est un point **adhérent** à A si a n'est pas un point extérieur.

Exercice 2.

Recopier le dessin au tableau et remplir le tableau ci-contre concernant la partie A ci-dessous :

Point	Intérieur	Extérieur	Adhérent
a			
b			
c			
d			

Remarque.

- On peut montrer, à l'aide de la définition des parties ouvertes et fermées que :
 - Une partie A est ouverte si et seulement si tous les points de A sont intérieurs à A .

– Une partie A est fermée si et seulement si tous les points de A sont adhérents à A .

- Un point intérieur à A est nécessairement dans A mais tous les points de A ne sont pas forcément intérieurs à A .
- Un point adhérent à A n'est pas forcément dans A mais tous les points de A sont adhérents à A .
- Un point peut être ni intérieur, ni extérieur : c'est ce qu'on appelle un point de la frontière ->

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On définit la **frontière** de A , parfois aussi appelée **bord** de A , comme l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas intérieurs à A , ou encore l'ensemble des points qui ne sont ni intérieurs, ni extérieurs.

Remarque. Sur le dessin précédent, la frontière s'obtient comme la réunion du trait plein et du trait en pointillé.

PROPOSITION 4 — Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On note F sa frontière.

- Si A est fermé, $F \subset A$.
- Si A est ouverte, $A \cap F = \emptyset$.



Point culture.

L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\overset{\circ}{A}$.
L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$.

2 Limites et continuité

Dans toute la section, Ω désigne une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Limite en un point adhérent à une partie

— *Définition.* —

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathbb{R}^n$ un point adhérent à Ω .

- On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq \delta \implies |f(u) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = \ell$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand u tend vers a si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq \delta \implies f(u) \geq M \text{ (resp. } \leq -M \text{)}.$$

On note alors $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = \pm\infty$.

— *Définition.* —

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \Omega$. On dit que f est **continue en a** si $\lim_{u \rightarrow a} f(u)$ existe et vaut $f(a)$.

Remarque. L'étude des limites et de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.

Erreur fréquente.

La notion de limite en dimension $n \geq 2$ est un peu plus délicate à manipuler. Regardons un exemple avec $n = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et

$$f : (x, y) \in \Omega \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Le point 0 est adhérent à Ω et on peut s'intéresser à $\lim_{u \rightarrow 0} f(u)$. Or, on a

- $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

- $f(0, y) = 0 \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$.

- $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$.

En fonction de la direction choisie dans Ω pour atteindre 0, on ne trouve pas la même limite pour f : c'est donc que la limite en 0 n'existe pas. On ne pourra donc pas simplement "fixer une variable puis l'autre".

2.2 Fonctions continues

— *Définition.* —

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue** (sur Ω) si pour tout $a \in \Omega$, f est continue en a . On note $\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω .

PROPOSITION 5 — *Stabilité des fonctions continues*¹

1. Stabilité par **combinaison linéaire** : $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$: si $f, g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est encore continue.
2. Stabilité par **produit** : Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $fg \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.
3. Stabilité par **quotient** : Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et si g ne s'annule pas sur Ω , $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.
4. Stabilité par **composition** : Soit Ω' une partie de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^0(\Omega')$. On suppose que $g(\Omega') \subset \Omega$, de sorte que $f \circ g$ est bien définie. Alors, $f \circ g$ est continue.



Savoir-faire.

En pratique, pour justifier qu'une fonction est continue, il s'agira simplement de remarquer qu'elle s'écrit à l'aide des fonctions usuelles, qui sont continues.

Exemple :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

est continue par opérations.

¹ On peut (et on devrait) d'abord énoncer les résultats précédents au cas de la continuité en un point, utiles pour prouver cette proposition.

THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie **fermée et bornée**. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ **continue**. Alors, f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a, b \in K$ tels que pour tout $u \in K$, $f(a) \leq f(u) \leq f(b)$.

- S'il y a bien un résultat à retenir dans cette partie, c'est lui ! C'est un résultat crucial en maths qui permet de justifier l'existence d'un maximum ou d'un minimum.
- La version 1D a été vue en TSI1 : **une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**. Les segments sont effectivement des parties fermées et bornées.
- Les hypothèses sont cruciales :
 - Si la partie n'est pas fermée, la fonction peut être continue sans être bornée. Exemple : $x \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{x}$.
 - Si la partie n'est pas bornée, la fonction peut être continue sans être bornée. Exemple : $x \in [1, +\infty[\mapsto e^x$.
 - Si l'une des deux hypothèses manque, la fonction peut être continue et bornée, mais sans atteindre ses bornes. Exemple : $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-x}$. La fonction est bornée mais n'atteint pas son inf, qui vaut 0.

**Point culture.**

Dans $\mathbb{R}^n$, les parties fermées bornées sont ce qu'on appelle les parties **compactes** de $\mathbb{R}^n$. La compacité est une notion très importante en maths.

3 Calcul différentiel

Dans toute cette partie,

- Ω désigne une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ et a un point intérieur à Ω . On notera $a = (a_1, \dots, a_n)$.
- U désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

- i désignera un indice de $\{1, \dots, n\}$.

Définition.

Application partielle par rapport à la i -ième variable. L'application partielle de f en a par rapport à la i -ième variable est l'application, souvent notée f_i ou f_{x_i} définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par

$$f_i : t \in I \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

**Exercice 3.**

On reprend l'application f du premier exemple : $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Donner les applications partielles de f en $a = (1, 1)$.

3.1 Dérivées partielles d'ordre 1.

Définition.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en a si l'application f_i est dérivable en a_i . Cela revient à dire que le quotient

$$\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t - a_i}$$

possède une limite finie quand t tend vers a_i . Cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ ou } \partial_{x_i} f(a) \text{ ou } \partial_i f(a).$$

Elle s'appelle la i -ième dérivée partielle de f en a ou dérivée partielle de f par rapport à x_i en a .

— *Définition.* —

Gradient. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f possède des dérivées partielles en a par rapport à x_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On définit alors **le gradient de f en a , noté $\nabla f(a)$** comme étant le vecteur suivant de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}.$$



Exercice 4.

Calculer les dérivées partielles de $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $a = (1, 1)$ et en déduire le gradient de f en a .

— *Définition.* —

Point critique. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f possède des dérivées partielles en a par rapport à x_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On dit que a est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = 0$.

Exemple. Pour l'exercice précédent, $a = (1, 1)$ n'est pas un point critique de f .

Remarque. Si $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a , la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_1 en a n'est autre que la dérivée de f en a . Le gradient de f est le vecteur à une seule coordonnée $f'(a)$.

3.2 Fonctions de classe C^1

— *Définition.* —

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour tout $a \in U$, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en a . On peut alors définir la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

parfois aussi notée $\partial_i f$. On l'appelle la **dérivée partielle de f par rapport à x_i** .



Savoir-faire.

Pour calculer la dérivée partielle par rapport à x_i , on fige les autres variables (=on les voit comme des constantes) et on dérive la fonction par rapport à x_i avec les règles usuelles de calcul de dérivée d'une seule variable.

En particulier, dans le cas d'une fonction de deux variables x et y , pour calculer la dérivée partielle par rapport à x (resp. y), on fixe y (resp. x) et on dérive par rapport à x (resp. y).



Exercice 5.

Calculer les dérivées partielles de $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Exercice 6.

Calculer les dérivées partielles de $g(x, y) = xe^{x-y^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

— *Définition.* —

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de **classe C^1** si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie sur U et est **continue** sur U . On note $C^1(U)$ l'ensemble des applications de classe C^1 sur U .

Exemple. Les applications f et g des exercices précédents sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Dans la sous-section précédente, on a défini la notion de dérivée partielle pour des fonctions f définies sur une partie Ω *a priori* quelconque mais la notion n'a de sens que pour des points intérieurs à Ω . Pour parler de fonctions $\mathcal{C}^1$, on doit se placer sur un ouvert U .

PROPOSITION 6 — *Propriétés et stabilités des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.*

1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.
2. Stabilité par **combinaison linéaire** : $\mathcal{C}^1(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: si $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est encore $\mathcal{C}^1$.
3. Stabilité par **produit** : Si $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$, $fg \in \mathcal{C}^1(U)$.
4. Stabilité par **quotient** : Si $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$ et si g ne s'annule pas sur U , $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^1(U)$.

Développement limité.

— Définition. —

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f(x) = o(\|x - a\|)$ quand x tend vers a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{\|x - a\|} = 0$.

— DÉVELOPPEMENT LIMITÉ POUR UNE FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^1$ —

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. f possède le développement limité suivant au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + (x_n - a_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + o(\|x - a\|)$$

Remarque.

- Avec la notation ∇f , le développement limité ci-dessus se réécrit de façon plus concise :

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + o(\|x - a\|)$$

- Pour $n = 1$, on retrouve le $DL_1(a)$: $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$.



Exercice 7.

Écrire le développement limité en $(0, 0)$ de e^{x-y} et $\sin(x + 3y)$.

3.3 Règle(s) de la chaîne

La règle de la chaîne est la formule générale qui permet de calculer les dérivées partielles de fonctions composées. Dans le cours de TSI, vous aurez à connaître deux cas particuliers. Ce sont des propriétés très importantes pour les exercices et les calculs. Il est important d'avoir compris d'où sortent ces formules si vous voulez les retrouver vite pour ne pas avoir à les apprendre par coeur.

Dans cette sous-section U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pour comprendre les formules qui suivent, il est utile de rappeler :

— DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE —

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $g(I) \subset J$. Alors $f \circ g$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in I, (f \circ g)'(t) = g'(t)f'(g(t)).$$

— RÈGLE DE LA CHAÎNE I —

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in I$, $(u(t), v(t)) \in U$, de sorte que l'application

$$g : t \in I \mapsto f(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}$$

est bien définie. Alors, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).$$

 Astuce

Pour éviter trop de confusion, la variable t désigne un paramètre de I . Les variables x et y désignent les coordonnées d'un point de U .

La fonction u est associée à la variable x : la dérivée de u multiplie $\partial_x f$.

La fonction v est associée à la variable y : la dérivée de v multiplie $\partial_y f$.

Les deux termes sont obtenus comme dérivées d'une *composée "partielle"* et s'additionnent pour former la *dérivée "totale"* de g .

 Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer la dérivée de $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^t, \sqrt{t^2 + 1})$ en fonction des dérivées partielles de f .

RÈGLE DE LA CHAÎNE II

Soit $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $f : U' \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que pour tout $(u, v) \in U$, $(g(u, v), h(u, v)) \in U'$ de sorte que l'on peut définir l'application

$$\varphi : (u, v) \in U \mapsto f(g(u, v), h(u, v)) \in \mathbb{R}.$$

Alors, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u, v) \in U$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

 Astuce

Pour éviter trop de confusion, les variables x et y désignent les arguments de f , tandis que u et v désignent les arguments de g, h et donc φ .

g est associée à la variable x : la dérivée partielle de g multiplie $\partial_x f$.

h est associée à la variable y : la dérivée partielle de h multiplie $\partial_y f$.

Les deux termes sont obtenus comme dérivées d'une *composée "partielle"* et s'additionnent pour former la *dérivée "totale"* de φ par rapport à u (ou v).

Cas d'un changement de variable linéaire

Les changements de variable linéaires, dont un exemple est traité ci-dessous, vous seront très utiles pour la résolution de certaines EDP par la méthode du changement de variable. (Voir An8 en fin d'année).

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'application $\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u + 3v, 2u - v)$. Par la règle de la chaîne, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } u \text{ dans la première coordonnée de } f} + \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } u \text{ dans la deuxième coordonnée de } f}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } v \text{ dans la première coordonnée de } f} + \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } v \text{ dans la deuxième coordonnée de } f}$$

En effet, on peut appliquer les formules ci-dessus avec $g(u, v) = u + 3v$ et $h(u, v) = 2u - v$ de sorte que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \quad, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \quad, \quad \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \quad, \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) =$$

 Astuce

En pratique, il n'est pas nécessaire d'écrire la formule en détail : on peut directement remplacer les dérivées partielles de g et h par rapport à u et v par leurs valeurs. D'ailleurs, les variables u et v peuvent avoir un autre nom : il faut savoir s'adapter au contexte.

Cas du changement de variable polaire

Exemple. Dans cet exemple, très important et à savoir refaire, les variables u et v sont appelées r et θ .

On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On veut exprimer f en coordonnées polaires : pour cela, on introduit le changement de variable polaire

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } \theta \in]0, 2\pi[.$$

On définit alors une nouvelle fonction

$$g : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

On dit que g est l'expression de f en coordonnées polaires. Vous devez alors être capables de calculer les dérivées partielles de g par rapport à r et θ en fonction de celles de f (par rapport à x et y).

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \underbrace{\quad}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } r \text{ dans la première coordonnée de } f} + \underbrace{\quad}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } r \text{ dans la deuxième coordonnée de } f} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \underbrace{\quad}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } \theta \text{ dans la première coordonnée de } f} + \underbrace{\quad}_{\text{obtenu en dérivant par rapport à } \theta \text{ dans la deuxième coordonnée de } f} \end{aligned}$$

3.4 Dérivées partielles d'ordre 2.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on peut la dériver par rapport à chacune de ses variables et l'on obtient les n applications $\partial_{x_i} f$ qui sont des applications définies sur U . Si c'est possible, on peut dériver chacune de ces fonctions par rapport à chacune des variables et l'on obtient les **dérivées partielles d'ordre 2** :

- Si $i \neq j$ et si l'on dérive $\partial_{x_j} f$ par rapport à x_i , on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

L'ordre de dérivation est important : on dérive de droite à gauche par rapport aux variables présentes au dénominateur, d'abord x_j puis x_i .

- Si l'on dérive deux fois par rapport à x_i , on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Pour le cas d'une fonction de deux variables, $f(x, y)$, les dérivées partielles se notent plus simplement :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	On dérive par rapport à y puis rapport à x
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	On dérive par rapport à x puis rapport à y
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	On dérive deux fois par rapport à x
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	On dérive deux fois par rapport à y



Exercice 9.

On reprend l'exemple de $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Calculons chacune des dérivées partielles d'ordre 2.

Définition.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f existent et sont continues sur U . On note $\mathcal{C}^2(U)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

PROPOSITION 7 — *Propriétés et stabilités des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.*

1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est $\mathcal{C}^1$.
2. Stabilité par **combinaison linéaire** : $\mathcal{C}^2(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: si $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est encore $\mathcal{C}^2$.
3. Stabilité par **produit** : Si $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$, $fg \in \mathcal{C}^2(U)$.
4. Stabilité par **quotient** : Si $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$ et si g ne s'annule pas sur U , $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^2(U)$.

THÉORÈME DE SCHWARZ

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, pour tout $a \in U$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Remarque.

- On peut donc dériver dans l'ordre qu'on veut une fonction $\mathcal{C}^2$.
- Pour le cas d'une fonction de 2 variables $f(x, y)$, il n'y a donc qu'une seule égalité pertinente dans ce théorème : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
- En pratique, vous ne rencontrerez (presque) que des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc les dérivées "croisées" sont toujours égales. Il est donc bon de garder en tête ce théorème si l'on veut s'éviter deux fois le même calcul.

 Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(u, v) = f(u + v, u - v)$. Justifier que g est $\mathcal{C}^2$ et exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en fonction des dérivées d'ordre 2 de f .

 Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Justifier que g est $\mathcal{C}^2$ et exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ en fonction des dérivées d'ordre 1 et 2 de f .

 Point culture.

| Dans le cas d'une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$, on peut définir la

matrice hessienne de f en a , parfois notée $D^2 f(a)$ par

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice symétrique réelle par le théorème de Schwarz ... donc diagonalisable. Elle est souvent utile pour déterminer la nature d'un point critique (max ou min local) et apparaît de temps en temps dans les sujets de modélisation.