

Programme de khôlle. Semaine 2

Description des thèmes

Voir le poly dans <https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/docs?rep=12>

Le point 3.3, grisé, n'a pas encore fait l'objet d'exercices en classe. On pourra demander d'effectuer un calcul de dérivées partielles d'ordre 2 sur une fonction explicite, en évitant les questions du type "Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ avec $g = (u, v) \mapsto f(u + v, u - v)$ en fonction des dérivées partielles d'ordre 2 de f , supposée C^2 " (exercice 10 du poly de cours).

AL1 - Rappels d'algèbre linéaire et compléments sur les matrices

Un exercice de la khôlle pourra porter sur ce chapitre, mais ce n'est pas une obligation. Voir programme précédent.

An1 - Introduction au calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Dans la plupart des exemples et applications, $n = 2$ et plus rarement $n = 3$.

1. Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$. *L'étude théorique n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent surtout en avoir une intuition.*
 1. **Distance euclidienne.** Produits scalaire. Norme. Propriétés. Inégalité triangulaire. Distance. Inégalité triangulaire. Définition des boules ouvertes et fermées. Définition des parties bornées.
 2. **Parties ouverte et fermées.** Définition. Dessins. Exemples. Aucun attendu théorique. Il s'agit surtout de "voir" qu'une partie est ouverte ou fermée.
 3. **Intérieur, extérieur, frontière.** Définition des points intérieurs, extérieurs, adhérents. Définition de la frontière. Une partie fermée contient sa frontière. La frontière d'une partie ouverte est dans le complémentaire.
2. Limites et continuité *L'étude théorique n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent surtout en avoir une intuition.*
 1. **Limite (finie ou infinie) en un point adhérent.** Définition théorique. Continuité en un point. Aucun attendu sur la définition n'est exigible.
 2. **Fonctions continues.** Définition. Stabilité : CL, produit, quotient, composé. Les fonctions écrites à partir des fonctions usuelles seront toujours continues sur leur domaine de définition. **Théorème des bornes atteintes.**
3. Dérivées partielles d'ordre 1 et 2
 1. **Dérivées partielles d'ordre 1.** Définition des dérivées partielles en un point intérieur. Fonctions de classe C^1 . Stabilité : CL, produit, quotient. Méthode et exemple de calculs. Gradient. Point critique. DL d'ordre 1.
 2. **Règles de la chaîne.** La formule générale n'est pas au programme. Les élèves doivent maîtriser :
 - Cas de $f(x(t), y(t))$.
 - Cas de $F(u, v) = f(h(u, v), g(u, v))$. Exemple 1 : cas affine du type. $f(u + 3v, 2u - 3v)$. Exemple 2 (fondamental) : Polaire. $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.
 3. **Dérivées partielles d'ordre 2.** Définition des dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur. Fonctions de classe C^2 . Stabilité : CL, produit, quotient. Théorème de Schwarz.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

— **Panier 1 :**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A^T A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
2. Donner la formule donnant le développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point a d'une fonction f de classe C^1 .
3. Donner la formule de la dérivée d'une fonction composée

$$g : t \in I \mapsto f(u(t), v(t))$$

si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .

— **Panier 2 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base puis sa dimension (sans preuve).
2. Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. Citer précisément avec les hypothèses le théorème de Schwarz.

— **Panier 3 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base puis sa dimension (sans preuve).
2. Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < x^2\}$.
3. Citer précisément avec les hypothèses le théorème des bornes atteintes.

Exercice(s) au choix

Demander au moins un calcul explicite de dérivées partielles d'ordre 1 et 2.