I Fonctions continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Définitions

On appelle **subdivision** du segment $[a,b]$ une suite finie $\{a_0, ..., a_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• On dit que la fonction f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

• On dit que la fonction f est **de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Dans les deux cas, on dit que la subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ est **adaptée** à f.

Exemple :

Attention ! Il ne suffit pas que les restrictions $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soient continues ou de classe $\mathscr{C}^1$. Exemple :

Définition

Une fonction T-périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période, c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a, a+T]$.

Exemple : f la fonction 3-périodique définie par : $\forall t \in [0,3[,\ f(t) = \sqrt{t}$.

Notations

On note :
- $\mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$
- $\mathscr{C}^1\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$
- $\mathscr{C}^0_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues T-périodiques
- $\mathscr{C}^1_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ T-périodiques
- $\mathscr{C}^0_T\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux T-périodiques
- $\mathscr{C}^1_T\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux T-périodiques

Proposition

Ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ pour les deux premiers, et de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour les suivants.

Remarques :

- Le produit ou le quotient (avec un dénominateur qui ne s'annule pas) de deux fonctions continues par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) est encore une fonction continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux).
- La valeur absolue d'une fonction continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) est encore une fonction continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux).

Proposition

Si $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ alors f possède :
- une limite finie à gauche et à droite en tout point $x \in]a,b[$ (qui peuvent être différentes, et différentes de $f(x_0)$)
- une limite à droite en a (qui peut être différente de $f(a)$)
- une limite à gauche en b (qui peut être différente de $f(b)$)

Proposition

Si $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ alors f est bornée.

Preuve.

Définition (intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux)

Soient $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, on note f_i la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$, et $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité de f_i à $[a_i, a_{i+1}]$.
On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$ le réel noté $\int_{[a,b]} f$ défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f_i}(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque : Si f est positive, alors le nombre $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est l'aire du domaine

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Exemple : Calculer $I = \displaystyle\int_0^9 E(\sqrt{x})\mathrm{d}x$ où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière.

Rappel

Toute fonction f à valeurs complexes se décompose en $f = \mathrm{Re}(f) + i \cdot \mathrm{Im}(f)$ où $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions à valeurs réelles.

Définitions

On dit que $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C})$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ appartiennent à $\mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$. On pose alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \cdot \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{C}.$$

II Propriétés des fonctions continues par morceaux

Toutes les propriétés énoncées dans ce chapitre ont déjà été vues en TSI1 dans le cadre des fonctions continues, et elles s'étendent au cadre des fonctions continues par morceaux. Dans tout le chapitre, on notera $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

Proposition

L'intégrale est une opération qui s'applique à des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, et vérifie les propriétés suivantes :

- Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$
- Positivité : si $f \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$
- Croissance : si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
- Additivité : si $c \in]a,b[$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Remarque : Si $a > b$, on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_{[b,a]} f$.

Proposition (inégalité de la moyenne)

Si $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{R})$ et m, M sont deux constantes réelles, alors

$$m \leq f \leq M \Longrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq M.$$

Proposition (inégalité triangulaire)

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Proposition

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $f, g \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([a,b],\mathbb{K})$ alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f|\right) \cdot \int_{[a,b]} |g|$.

Attention ! On ne peut plus dire qu'une fonction continue par morceaux positive d'intégrale nulle est nulle (vrai pour une fonction continue). Exemple : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(1/2) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$ sont indépendantes du choix de $a \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Proposition

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{C}^0\mathscr{M}([-a, a], \mathbb{K})$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Preuve :