TELEEXERCICES01-T02

Enoncé

Exercice 01

1. Linéariser $\sin^3 x$.
2. Résoudre l'équation différentielle linéaire : $y''(x) - y(x) = \sin^3 x$.

Indications :
1. On utilise la formule de Leonhard Euler : $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ et comme on calcule $\sin^3 x$, on utilise alors $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Le développement donnera $\sin^3 x$ sous la forme $a\sin x + b\sin(3x)$, où a et b sont à déterminer.
2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y''(x) - y(x) = 0$. (On utilisera l'équation caractéristique.) Puis, on déterminera une solution particulière de $y''(x) - y(x) = a\sin x$ de la forme $y_{p_1}(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$, puis on déterminera une solution particulière de $y''(x) - y(x) = b\sin(3x)$ de la forme $y_{p_2}(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$.

Exercice 02

On sait que parmi tous les élèves de prépa de la filière TSI, $\frac{1}{1000}$ sont des génies (QI>150). On fait une étude dans plusieurs grands lycées, où l'effectif total en TSI1-TSI2 est de 500 élèves.

1. Soit X le nombre de ces élèves qui sont des génies. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance.
2. Par quelle loi au programme peut-on approcher X ? Donner son espérance.

   Dans la suite, on pourra faire les calculs avec la loi exacte ou utiliser son approximation.
3. On peut détecter les génies grâce à un test que passent les élèves.
   Quelle est la probabilité qu'au moins un des 500 élèves soit finalement un génie ?
4. On suppose que l'on sait qu'il y a au moins un génie dans l'échantillon.
   Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes soient des génies ?

Indications :
1. C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. À vous de trouver n et p.
2. Une seule loi convient, pour celui qui connait son cours.
3. On rappelle que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Correction

Exercice 01

1. On utilise la formule de Leonhard Euler : $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.
Comme on calcule $\sin^3 x$, on utilise alors $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ainsi :

$$\sin^3 x = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}\right).$$

Cela donne :

$$\sin^3 x = \frac{-1}{8i}\left(2i\sin(3x) - 6i\sin x\right) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y''(x) - y(x) = 0$.
Comme $r^2 - 1 = 0$ donne $r = \pm 1$, l'ensemble des solutions est :

$$y_h : x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Puis, on détermine une solution particulière de $y''(x) - y(x) = \frac{3}{4}\sin x$ de la forme $y_{p_1}(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
On a :

$$y_{p_1}(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x \Rightarrow y'_{p_1}(x) = -\lambda\sin x + \mu\cos x \Rightarrow y''_{p_1}(x) = -\lambda\cos x - \mu\sin x.$$

Ainsi : $y''_{p_1}(x) - y_{p_1}(x) = -2\lambda\cos x - 2\mu\sin x = \frac{3}{4}\sin x$.
Comme la famille $(\sin, \cos)$ est libre, il reste : $-2\lambda = 0$ et $-2\mu = \frac{3}{4}$.
Ainsi, $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{-3}{8}$.
Donc : $y_{p_1}(x) = \frac{-3}{8}\sin x$.
Puis, on détermine une solution particulière de $y''(x) - y(x) = \frac{-1}{4}\sin(3x)$ de la forme

$$y_{p_2}(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x).$$

On a :

$$y_{p_2}(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) \Rightarrow y'_{p_2}(x) = -3\lambda\sin(3x) + 3\mu\cos(3x) \Rightarrow y''_{p_2}(x) = -9\lambda\cos(3x) - 9\mu\sin(3x).$$

Ainsi : $y''_{p_2}(x) - y_{p_2}(x) = -10\lambda\cos(3x) - 10\mu\sin(3x) = \frac{-1}{4}\sin(3x)$.
Comme la famille $(\sin(3x), \cos(3x))$ est libre, il reste : $-10\lambda = 0$ et $-10\mu = \frac{-1}{4}$.
Ainsi, $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{1}{40}$.
Donc : $y_{p_2}(x) = \frac{1}{40}\sin(3x)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$y : x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{-3}{8}\sin x + \frac{1}{40}\sin(3x), \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 02

1. C'est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(500, \frac{1}{1000}\right)$ et $E(X) = np = \frac{1}{2}$.

2. Une seule loi convient, c'est une loi de Poisson de paramètre $np = \frac{1}{2}$. Et son espérance est encore $\frac{1}{2}$.

3. On rappelle que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Alors avec la loi binomiale,

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{500} = 0.3936.$$

Et avec la loi de Poisson,

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{\frac{-1}{2}} = 0.3935.$$

4. On calcule $P_{(X \geqslant 1(}(X \geqslant 2) = \dfrac{P(X \geqslant 2)}{P(X \geqslant 1)}$.
On calcule :

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1).$$

On obtient pour $P_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 2)$ la quantité 0.2289 ou 0.229 selon le cas.