# TELEEXERCICES01-T03
# Enoncé

---

**Exercice 01**

Soit $\Gamma$ la courbe paramétrée définie par $f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{t+3}, \dfrac{1}{t-2}\right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

1. Déterminer $t$ pour que la tangente en $M(t)$ admette $\vec{i} + 4\vec{j}$ pour vecteur directeur.
2. Étudier et tracer l'arc paramétré correspondant.

**Indications :**
**1.** On sait que la tangente en un point régulier $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est portée par le vecteur dérivé $f'(t_0)$. On sait d'autre part que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
**2.** Pour étudier une courbe paramétrée, on rappelle que l'on doit :
1) Trouver le domaine de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
2) Etablir les éventuelles parités et symétries pour réduire le domaine d'étude.
3) Repérer les points stationnaires (qui annulent à la fois $x'(t)$ et $y'(t)$). Et étudier leur genre.
4) Dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ en trouvant les limites aux bords du domaine de définition.
5) Étudier les branches infinies pour trouver les asymptotes horizontanes, verticales ou obliques.
6) Tracer l'arc avec les tangentes particulières (horizontales, verticales) et les éventuelles asymptotes.

---

**Exercice 02**

Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$(E) :\ t^2 y''(t) - 4t y'(t) + 6y(t) = 0.$$

En déduire une base des solutions.

**Indications :**
On fait comme pour la recherche d'une solution développable en série entière, sauf que la somme ne va pas jusqu'à l'infini. On pose $y_p(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. On écrit $y_p'(t)$ puis $y_p''(t)$ puis $t y_p'(t)$ puis $t^2 y_p''(t)$ sous formes de sommes et on remplace dans l'équation différentielle. On remarque alors que tous les $a_k$ sont nuls sauf pour certains $k$ à trouver.
Pour la base des solutions, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions ?

# Correction

**Exercice 01**

**1.** On sait que la tangente en un point régulier $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est portée par le vecteur dérivé $f'(t_0)$. On sait d'autre part que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
Comme $f'(t) = \left(\dfrac{-1}{(t+3)^2}, \dfrac{-1}{(t-2)^2}\right)$ alors déjà tous les points sont réguliers et donc $f'(t)$ et $(1,4)$sont colineaires si et seulement si

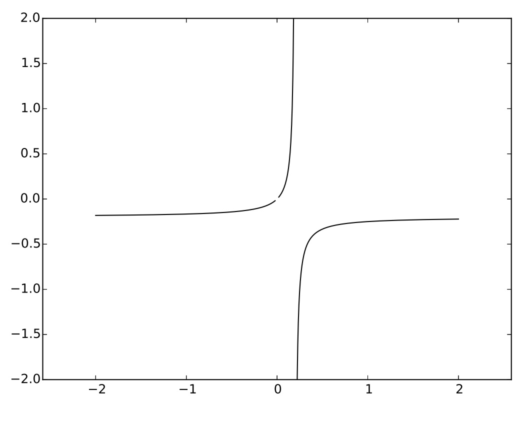
$$\frac{-4}{(t+3)^2} + \frac{1}{(t-2)^2} = 0.$$

On a une équation du second degré en $t$ qui donne $t = \dfrac{1}{3}$ ou $t = 7$.

**2.** L'arc possède des branches infinies pour $t = -3$ et $t = 2$. Les fonctions $x$ et $y$ sont strictement décroissantes sur les trois intervalles $]-\infty, -3[$, $]-3, -2[$ et $]2, +\infty[$.
Les droites $y = -\dfrac{1}{5}$ et $x = \dfrac{1}{5}$ sont des asymptotes respectivement pour $t$ tendant vers $-3$ et $t$ tendant vers 2.
De même les droites $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes pour $t$ tendant vers $\pm\infty$.
Pour $I_1 = ]-\infty, -3[$, $x$ décroit de 0 à $-\infty$ et $y$ décroit de 0 à $-1/5$. La courbe part d'au dessus de l'asymptote $y = -1/5$ et va de la gauche vers la droite jusqu'au point 0.
Pour $I_2 = ]-3, -2[$ , $x$ décroit de $+\infty$ à $x = 1/5$ et $y$ décroit de $-1/5$ à $-\infty$. La courbe part de dessous $y = -1/5$ et descend de droite à gauche vers l'asymptote $x = 1/5$ en la collant en bas à droite.
Pour $I_3 = ]2, +\infty[$, $x$ décroit de $1/5$ à 0 et $y$ décroit de $+\infty$ à 0. Donc la courbe part de l'asymptote $x = 1/5$ en haut à droite et descend jusqu'au point 0.

pour le tracé avec PYTHON, on tape :

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy as np
>>> T1 = np.linspace(-50, -3.5, 400) ; T2 = np.linspace(-2.5, 1.5, 400) ; T3 = np.linspace(2.5, 50, 400)
>>> def x(t) : return 1/(t + 3)
>>> def y(t) : return 1/(t - 2)
>>> plt.plot(x(T1), y(T1), color = '0') ; plt.plot(x(T2), y(T2), color = '0')
>>> plt.plot(x(T3), y(T3), color = '0') ; plt.axis('equal') ; plt.show( )
```




**Exercice 02**

On fait comme pour la recherche d'une solution développable en série entière, sauf que la somme ne va pas jusqu'à l'infini. On pose $y_p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. On écrit $y_p'(t)$ puis $y_p''(t)$ puis $ty_p'(t)$ puis $t^2 y_p''(t)$ sous formes de sommes et on remplace dans l'équation différentielle.

La quantité

$$t^2 y_p''(t) - 4t y_p'(t) + 6 y_p(t)$$

vaut

$$t^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k t^{k-2} - 4t \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} + 6 \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Cela donne :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k t^k - \sum_{k=1}^{n} 4k a_k t^k + \sum_{k=0}^{n} 6 a_k t^k.$$

Et donc cela donne :

$$\sum_{k=2}^{n} (k^2 - 5k + 6) a_k t^k + 2a_1 t + 6a_0.$$

Comme cette quantité vaut 0, on a : $a_0 = a_1 = 0$ et $a_k = 0$ pour tout $k$ sauf pour $k^2 - 5k + 6 = 0$ soit si $k = 2$ ou $k = 3$.
En conclusion, l'ensemble des solutions polynomiales est $\mathrm{Vect}\,(t \mapsto t^2, t \mapsto t^3)$.
Comme l'équation différentielle linéaire est du second ordre et comme l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, c'est exactement $\mathrm{Vect}\,(t \mapsto t^2, t \mapsto t^3)$.