TELEEXERCICES01-T04
Enoncé

Exercice 01

On pose $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que K est diagonalisable en calculant le polynôme caractéristique χ_K.
2. Quel est le rang de K ?
3. Calculer K^2 en fonction de K. En déduire K^n.

Indications :
1. On calcule $\chi_K(t) = \mathsf{Det}\,(tI_4 - K)$ soit en développant directement selon une rangée, soit en ajoutant toutes les colonnes à la première d'abord puis on pourra factoriser $\chi_K(t)$ à la fin.
2. On sait que le rang de K est $4 - \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,K$.
3. On calculera K^2 en fonction de K puis K^3 en fonction de K puis on devinera K^n en fonction de K puis on fera une preuve par récurrence.

Exercice 02

Ici $a > 0$ fixé.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-au}\,du$ sont définies et égales (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t}$).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-au}\,du$.

Indications :
1. On pourra commencer par l'existence. On pourra utiliser le fait que si $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(t)\,dt$ existe (avec $b > 0$ fixé) alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ existe. Pour le reste de la question, l'indication est déjà donnée.
2. On fera une I.P.P à $\displaystyle\int_0^X 2ue^{-au}\,du$. Et on fera tendre X vers $+\infty$.
On rappelle que $\displaystyle\int_0^X f(u)g'(u)\,du = -\int_0^X f'(u)g(u)\,du + [f(u)g(u)]_0^X$.

Correction

Exercice 01

1. On calcule $\chi_K(t) = \mathsf{Det}\,(tI_4 - K)$. On a :

$$\chi_K(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

qui donne :

$$\chi_K(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ t & t-1 & 0 & 1 \\ t & 0 & t-1 & 0 \\ t & 1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

ou encore :

$$\chi_K(t) = t\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

Puis on enlève L_1 aux autres lignes. On a :

$$\chi_K(t) = t\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = t(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix}$$

On développe selon la colonne C_1 puis la ligne L_2 du nouveau déterminant :

$$\chi_K(t) = t(t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = t(t-2)\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

On a :

$$\chi_K(t) = t(t-2)((t-1)^2 - 1) = t^2(t-2)^2.$$

2. On sait que le rang de K est $4 - \mathsf{dim\,Ker}\,K$.
On résout le système : $KX = 0$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\mathrm{Vect}\left((1,0,1,0),(0,1,0,1)\right)$.
Comme $\mathsf{dim}\,\ker K = 2$, le rang de K est 2.
3. On calcule K^2 en fonction de K. On trouve :

$$K^2 = 2K.$$

Puis $K^3 = 2K^2 = 2^2K$. Puis, montrons l'hérdité.
on suppose $K^n = 2^{n-1}K$. Alors :

$$K^{n+1} = 2^{n-1}K^2 = 2^nK.$$

Exercice 02

1. On peut commencer par l'existence. Utilisons le fait que si $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(t)\,dt$ existe (avec $b > 0$ fixé) alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ existe.

Posons $f(t) = e^{-a\sqrt{t}}$. Alors $t^2 f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, $\displaystyle\int_b^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,dt$ converge. En 0 il n'y a pas de souci.

Pour l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-au}\,du$, on fait la même chose.

Pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-au}\,du$ sont dégales, on utilise le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans la première intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-au}\,2udu,$$

en utilisant$u^2 = t \Rightarrow dt = 2udu$. **2.** Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-au}\,du$.

On fait une I.P.P à $\displaystyle\int_0^{X} 2ue^{-au}\,du$. Et on fera tendre X vers $+\infty$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{X} f(u)g'(u)\,du = -\int_0^{X} f'(u)g(u)\,du + [f(u)g(u)]_0^X$.

Ici $f(u) = 2u$ et $g'(u) = e^{-au}$. On a : $f'(u) = 2$ et $g(u) = \dfrac{-1}{a}e^{-au}$. Alors :

$$\int_0^{X} 2ue^{-au}\,du = -\int_0^{X} \frac{-2}{a}e^{-au}\,du + \left[\frac{-2u}{a}e^{-au}\right]_0^X .$$

$\left[\dfrac{-2u}{a}e^{-au}\right]_0^X$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Puis :

$$-\int_0^{X} \frac{-2}{a}e^{-au}\,du = -\left[\frac{2}{a^2}e^{-au}\right]_0^X$$

qui tend vers $\dfrac{2}{a^2}$ quand X tend vers $+\infty$.