TELEEXERCICES01-T05
Enoncé

Exercice 01

Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

1. Étudier sa convergence.
2. Déterminer a et b tels que : $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n-1}$.
3. On admet que $\ln 2=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
   En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Indications :
1. On montrera que $\sum |u_n|$ converge (avec $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$.)
2. On mettra $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n-1}$ sous le même dénominateur.
3. On posera $S_N=\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Puis on utilisera **2.** ce qui décompose S_N en la somme de deux sigmas. On fera un glissement d'indice dans le deuxième sigma et on fera tendre N vers $+\infty$ après. On utilisera enfin $\ln 2=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 02

Soient a et b deux réels distincts et $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(a)=P(b)=0\}$.
Soit $\phi:\ \mathbf{R}_n[X]\to\mathbf{R}_n[X],\ P\mapsto P(a)X+P(b)$, n **étant un entier naturel supérieur ou égal à** 2.
On considère enfin les familles de polynômes $\mathcal{F}=\left\{(X-a)(X-b)X^k,\ k\in[\![0,n-2]\!]\right\}$ et $\mathcal{B}=\{1,X\}\cup\mathcal{F}$.

1. Vérifier que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ sont des familles libres de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de F. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
4. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{rg}\phi$.
5. **On suppose ici** $n=2$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
   Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\phi(t)$. ϕ est-elle diagonalisable ?

Indications :
1. On sait que des polynômes tous de deghré différents sont libres.
2. Il faudra pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ que si P et Q sont deux polynômes de F alors $P+\alpha Q$ l'est aussi.
3. On se rappellera la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$.
4. On comparera F et $\operatorname{Ker}\phi$. On sait aussi que $\operatorname{rg}\phi=\dim\mathbf{R}_n[X]-\dim\operatorname{Ker}\phi$.
5. On calcule $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi((X-a)(X-b))$ en fonction d'eux et cela donne les colonnes de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.