TELEEXERCICES01-T06
Enoncé

Exercice 01

Soit

$$\phi :\ \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}^{n+1},\ P \mapsto (P(0), ..., P(n)).$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

Indications :
Il faut montrer la linéarité, c'est-à-dire que pour tout $(P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$ et pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\phi(P + aQ) = \phi(P) + a\phi(Q).$$

Il faut montrer aussi la bijectivité. On sait que si ϕ est linéaire et que E et F sont de mêmes dimmensions finies alors ϕ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est injective.

Exercice 02

Soit f une fonction 2π périodique définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \pi + x & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \pi - x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer S_f, le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   Comment en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Indications :
1. Pas de souci pour le graphe. On remarquera la parité de f.
2. On rappelle que $S_f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$.
De plus, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\, dt$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\, dt$ avec $\omega = 2\pi/T$.
3. On appliquera le théorème de Dirichlet à la bonne valeur de t.