# TELEEXERCICES01-T07
# Enoncé

---

### Exercice 01

1. Résoudre dans $[-\pi, 0[$ et $]0, \pi]$ :
$$y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$
2. A-t-on des solutions sur $[-\pi, \pi]$ ? sur $\mathbf{R}$ ?

**Indications :**
**1.** On cherche les solutions de l'équation homogène $y''(x) + y(x) = 0$. Puis on prend $x < 0$ et on cherche une solution particulière de la forme $y_{p_1}(x) = ax\cos x$ car sin est impaire. On en déduit l'ensemble des solutions sur $]-\pi, 0]$. Puis on fait de même sur $]0, \pi]$ en cherchant une solution particulière de la forme $y_{p_2}(x) = bx\cos x$
**2.** Une solution sur $[-\pi, \pi]$ est de classe $C^2$ en 0.

---

### Exercice 02

Soit une suite $(P_n)$ de polynômes définie par :
$$P_0 = 2,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Si $n \geqslant 1$, montrer que $P_n$ est un polynôme unitaire de degré $n$.
2. Montrer : $\forall z \in \mathbf{C}^\star$, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Déterminer les racines de $P_n$.

**Indications :**
**1.** On fait une récurrence. On montre que la proposition est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Puis, on suppose que
$$P_k = X^k + Q_k, \text{ avec } Q_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$$
pour tout $k$ entier entre 1 et $n + 1$. On montre que c'est vrai pour $k = n + 2$.
**2.** On fait encore une récurrence en montrant que c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
**3.** On commencera par résoudre dans $\mathbf{C}$ : $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0$, c'est-à-dire :
$$z^{2n} = -1.$$