TELEEXERCICES01-T08
Enoncé

Exercice 01

Déterminer deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E(\mathbb{R})$ de (E).

Indications :

On pose bien entendu au départ $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec un rayon de convergence R à déterminer plus tard.

On utilise : $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$ pour $t \in]-R, R[$.

Quand on a remplaçé dans $y''(t) + ty'(t) + y(t)$, on a trois sommes et l'on met chacune sous la forme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n t^n$, après éventuellement un changement d'indice. Comme $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \times t^n$, on identifie les coefficients de chaque membre (deux développements en série entière sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux) et on obtient une relation ici entre a_{n+2} et a_n.

On pose $n = 2p$ et $n = 2p+1$ et après une récurrence descendante, on a a_{2p} en fonction de a_0 et a_{2p+1} en fonction de a_1. Ici pas de conditions initiales donc pas de a_0 et de a_1 determinables.

On en déduit que $y(t)$ est combinaison linéaire de deux développements en série entière $y_{p_1}(t)$ et $y_{p_2}(t)$ à trouver.

Il reste à trouver les rayons de convergence de ces deux développement en série entière et de conclure.

Exercice 02

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + I_n = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé canoniquement.

1. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres (complexes) possibles de M.
3. Soit $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que : $\mathrm{Im}\,(f - jId) \subset \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id)$.
   Puis que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - jId)$.
4. Montrer que M est diagonalisable.

Indications :

1. Cette question illustre une des méthodes pour trouver l'inverse d'une matrice. Quand on a un polynôme annulateur de M comme ici, il suffit d'écrire $M^2 + M + I_n = 0$ sous la forme $MN = I_n$ et donc $N = M^{-1}$.

2. On pose $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ et on multiplie $M^2 + M + I_n = 0$ par X puis on remplace MX par λX et $M^2 X$ par $\lambda^2 X$. On a alors un polynôme du second degré d'inconnue λ à résoudre.

3. Pour l'inclusion, il suffit de prendre $\vec{x} \in \mathrm{Im}\,(f - jId)$, donc de dire qu'il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} = f(\vec{y}) - j\vec{y}$ et de montrer que $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id)$, c'est-à-dire que $f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = 0$.

Pour montrer ensuite que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - jId)$, on commence par montrer que la somme est directe : $\mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id) \cap \mathrm{Ker}\,(f - jId) = \{\vec{0}\}$.

Puis, pour montrer que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id) + \mathrm{Ker}\,(f - jId)$, il faut montrer que tout vecteur de $\mathbb{C}^n$ est somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f - jId)$.

Pour cela, on raisonne par analyse-synthèse.

Supposons qu'une telle décomposition existe, alors : (1) $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, avec $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id)$ et $\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f - jId)$.

On écrit $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Appelons (2) cette égalité. Puis en combinant (1) et (2), on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{x}$ et de $f(\vec{x})$.

Il reste à montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi définis à partir de $\vec{x}$ sont dans les bons sous-espaces vectoriels.

4. Il reste à conclure.