TELEEXERCICES01-T06
Enoncé

Exercice 01

Soit

$$\phi: \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}^{n+1},\ P \mapsto (P(0), ..., P(n)).$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

Indications :
Il faut montrer la linéarité, c'est-à-dire que pour tout $(P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$ et pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\phi(P + aQ) = \phi(P) + a\phi(Q).$$

Il faut montrer aussi la bijectivité. On sait que si ϕ est linéaire et que E et F sont de mêmes dimmensions finies alors ϕ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est injective.

Exercice 02

Soit f une fonction 2π périodique définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \pi + x & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \pi - x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer S_f, le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   Comment en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Indications :
1. Pas de souci pour le graphe. On remarquera la parité de f.
2. On rappelle que $S_f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$.
De plus, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ avec $\omega = 2\pi/T$.
3. On appliquera le théorème de Dirichlet à la bonne valeur de t.

Correction

Exercice 01

Il faut montrer la linéarité, c'est-à-dire que pour tout $(P,Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$ et pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\phi(P + aQ) = \phi(P) + a\phi(Q).$$

On a :

$$\phi(P + aQ) = ((P + aQ)(0), ..., (P + aQ)(n)) = (P(0) + aQ(0), ..., P(n) + aQ(n)).$$

Et $\phi(P) + a\phi(Q) = (P(0), ..., P(n)) + a((Q(0), ..., Q(n))$. C'est pareil !
montrons aussi la bijectivité. On sait que si ϕ est linéaire et que E et F sont de mêmes dimensions finies (ici $\dim \mathbf{R}^{n+1} = n+1$ et $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1$. Alors ϕ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est injective. Or :

$$P \in \operatorname{Ker} \phi \text{ si et seulement si } P(0) = ...P(n) = 0.$$

Or P est de degré au plus n et a $n+1$ racines distinctes. Il est donc nul ; ϕ est injective donc bijective.

Exercice 02

1. Pas de souci pour le graphe. Ce sont des successions de triangles qui se touchent. On remarquera la parité de f. En effet, f est paire.

2. On rappelle que $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$.
De plus, $a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ avec $\omega = 2\pi/T$. Ici $b_n = 0$ car f est paire. On a :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Puis :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$$

car $\omega = 1$.
Faisons une IPP, pour tout $n \geqslant 1$, à l'intégrale

$$\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt = -\int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt + \left[(\pi - t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{pi}.$$

Soit :

$$\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \left[(\pi - t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}.$$

Soit :

$$\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt = \left(-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Alors $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}$.

Donc pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$S_f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)t).$$

3. On applique le théorème de Dirichlet à la bonne valeur de t. C'est $t = 0$. Comme f est continue, $f(t) = S_f(t)$ et c'est vrai en particulier pour $t = 0$ avec $f(0) = \pi$.
On trouve :

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Comment en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?
On pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $T = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Alors :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + T = \frac{1}{4}S + T \Rightarrow \frac{3}{4}S = T \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}.$$