TELEEXERCICES01-T05
Enoncé

Exercice 01

Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

1. Étudier sa convergence.
2. Déterminer a et b tels que : $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-1}$.
3. On admet que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
   En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Indications :
1. On montrera que $\sum |u_n|$ converge (avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$.)
2. On mettra $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-1}$ sous le même dénominateur.
3. On posera $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Puis on utilisera **2.** ce qui décompose S_N en la somme de deux sigmas. On fera un glissement d'indice dans le deuxième sigma et on fera tendre N vers $+\infty$ après. On utilisera enfin $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 02

Soient a et b deux réels distincts et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(a) = P(b) = 0\}$.
Soit $\phi :\ \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X],\ P \mapsto P(a)X + P(b)$, n **étant un entier naturel supérieur ou égal à** 2.
On considère enfin les familles de polynômes $\mathcal{F} = \left\{(X-a)(X-b)X^k,\ k \in [\![0, n-2]\!]\right\}$ et $\mathcal{B} = \{1, X\} \cup \mathcal{F}$.

1. Vérifier que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ sont des familles libres de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de F. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
4. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{rg}\phi$.
5. **On suppose ici** $n = 2$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
   Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_\phi(t)$. ϕ est-elle diagonalisable ?

Indications :
1. On sait que des polynômes tous de degré différents sont libres.
2. Il faudra pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ que si P et Q sont deux polynômes de F alors $P + \alpha Q$ l'est aussi.
3. On se rappellera la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$.
4. On comparera F et $\operatorname{Ker}\phi$. On sait aussi que $\operatorname{rg}\phi = \dim \mathbf{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker}\phi$.
5. On calcule $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi((X-a)(X-b))$ en fonction d'eux et cela donne les colonnes de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

Correction

Exercice 01

1. On montre facilement que $\sum |u_n|$ converge (avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$.)
Il suffit de remarquer que $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
2. On met $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-1}$ sous le même dénominateur. On identifie à $\dfrac{1}{n(n-1)}$ et on trouve :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}.$$

3. On pose $S_N = \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Puis on utilise **2.** ce qui décompose S_N en la somme de deux sigmas :

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = -\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n-1} = -\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Cela donne :

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Soit :

$$S_N = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 1.$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on utilise enfin $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Alors : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

Exercice 02

1. $\mathcal{F} = \big\{(X-a)(X-b)X^k,\, k \in [\![0, n-2]\!]\big\}$ et on sait que des polynômes tous de degré différents sont libres. C'est le cas ici car le degré de $(X-a)(X-b)X^k$ est $k+2$ pour k variant de 0 à $n-2$.
De même, $\mathcal{B} = \{1, X\} \cup \mathcal{F}$ est libre car on ajoute deux polynômes encore de degré différents.
2. Il faut pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ que si P et Q sont deux polynômes de F alors $P + \alpha Q$ l'est aussi.
On a :

$$P(a) = P(b) = 0 \text{ et } Q(a) = Q(b) = 0 \Rightarrow (P+\alpha Q)(a) = (P+\alpha Q)(b) = 0.$$

Donc $P + \alpha Q \in F$.
On voit que P est dans F si et seulement si $P = (X-a)(X-b)Z$, avec $Z \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$ car a et b sont des racines de P.
Alors P est bien une combinaison lineaire des polynômes de $\mathcal{F}$.
Comme ils sont libres, c'est une base de F.
Et :

$$\dim F = n - 1.$$

3. On se rappelle que la dimension de $\mathsf{R}_n[X]$ est $n+1$. Comme le cardinal de $\mathcal{B}$ est $n+1$ et comme ce sont des polynômes de $\mathsf{R}_n[X]$ et comme cette famille est libre, c'est une base de $\mathsf{R}_n[X]$.

4. On écrit :

$$\phi:\ \mathsf{R}_n[X] \to \mathsf{R}_n[X],\ P \mapsto P(a)X + P(b).$$

Et donc,

$$\phi(P+\lambda Q) = ((P+\lambda Q)(a))X + (P+\lambda Q)(b) = P(a)X + P(b) + \lambda(Q(a)X + Q(b)) = \phi(P) + \lambda\phi(Q).$$

On remarque que $\operatorname{Ker}\phi = F$.
On sait aussi que $\operatorname{rg}\phi = \mathsf{dim}\,\mathsf{R}_n[X] - \mathsf{dim}\operatorname{Ker}\phi$. Donc :

$$\operatorname{rg}\phi = n+1-(n-1) = 2.$$

5. On calcule $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi((X-a)(X-b))$ en fonction d'eux et cela donne les colonnes de la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
On a : $\phi(1) = X+1 = 1+X$, $_phi(X) = b+aX$ et $\phi((X-a)(X-b)) = 0$.
La matrice cherchée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -b & 0 \\ -1 & t-a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-1 & -b \\ -1 & t-a \end{vmatrix}.$
Ce qui donne :

$$\chi_A(t) = t(t^2-(a+1)t+a-b).$$

Il resteà étudier le Δ. Si $\Delta > 0$ et $a \neq b$, il y a trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable.