TELEEXERCICES01-T07
Enoncé

Exercice 01

1. Résoudre dans $[-\pi, 0[$ et $]0, \pi]$:
$$y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$
2. A-t-on des solutions sur $[-\pi, \pi]$? sur $\mathbf{R}$?

Indications :
1. On cherche les solutions de l'équation homogène $y''(x) + y(x) = 0$. Puis on prend $x < 0$ et on cherche une solution particulière de la forme $y_{p_1}(x) = ax\cos x$ car sin est impaire. On en déduit l'ensemble des solutions sur $]-\pi, 0]$. Puis on fait de même sur $]0, \pi]$ en cherchant une solution particulière de la forme $y_{p_2}(x) = bx\cos x$
2. Une solution sur $[-\pi, \pi]$ est de classe C^2 en 0.

Exercice 02

Soit une suite (P_n) de polynômes définie par :
$$P_0 = 2,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Si $n \geqslant 1$, montrer que P_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Montrer : $\forall z \in \mathbf{C}^\star$, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Déterminer les racines de P_n.

Indications :
1. On fait une récurrence. On montre que la proposition est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Puis, on suppose que
$$P_k = X^k + Q_k, \text{ avec } Q_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$$
pour tout k entier entre 1 et $n+1$. On montre que c'est vrai pour $k = n+2$.
2. On fait encore une récurrence en montrant que c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. On commencera par résoudre dans $\mathbf{C}$: $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0$, c'est-à-dire :
$$z^{2n} = -1.$$

Correction

Exercice 01

1. • On cherche les solutions de l'équation homogène $y''(x)+y(x)=0$.
Comme l'équation caractéristique est $r^2+1=0$ de solutions $\pm i$, si y_h est une solution quelconque alors pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$y_h(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x,$$

où λ et μ sont réels.
• Puis on prend $x<0$ et on cherche une solution particulière de la forme $y_{p_1}(x)=ax\cos x$ car sin est impaire. On en déduit l'ensemble des solutions sur $]-\pi,0]$. On a :

$$y''_{p_1}(x)+y_{p_1}(x)=-\sin x.$$

On a :

$$y'_{p_1}(x)=a(\cos x-x\sin x)\Rightarrow y''_{p_1}(x)=a(-2\sin x-x\cos x).$$

Et donc :

$$y''_{p_1}(x)+y_{p_1}(x)=a(-2\sin x-x\cos x)ax\cos x=-2a\sin x=-\sin x.$$

On en déduit : $a=\dfrac{1}{2}$.
• Puis on fait de même sur $]0,\pi]$ en cherchant une solution particulière de la forme $y_{p_2}(x)=bx\cos x$.
On trouve en procédant pareil ou alors par parité : $b=-\dfrac{1}{2}$.
• L'ensemble des solutions est :

$$\forall x\in[-\pi,0],\ y(x)=\lambda_1\cos x+\mu_1\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

où λ_1 et μ_1 sont réels et

$$\forall x\in[0,\pi],\ y(x)=\lambda_2\cos x+\mu_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x,$$

où λ_2 et μ_2 sont réels.
On remarque que pour $x=0$ les solutions se confondent en $y(0)=0$.
2. Une solution sur $[-\pi,\pi]$ est de classe C^2 en 0.
On a : $\forall x\in[-\pi,0]$, $y'(x)=-\lambda_1\sin x+\mu_1\cos x+\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x$, où λ_1 et μ_1 sont réels.
Et : $\forall x\in[0,\pi]$, $y'(x)=-\lambda_2\sin x+\mu_2\cos x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x$, où λ_2 et μ_2 sont réels.
De même, $\forall x\in[-\pi,0]$, $y''(x)=-\lambda_1\cos x-\mu_1\sin x-\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$, où λ_1 et μ_1 sont réels.
Et : $\forall x\in[0,\pi]$, $y''(x)=-\lambda_2\cos x-\mu_2\sin x+\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$,
où λ_2 et μ_2 sont réels.
Alors : $y'(0)=\mu_1+\dfrac{1}{2}=\mu_2-\dfrac{1}{2}$ et $y''(0)=-\lambda_1=-\lambda_2$.
Alors $\lambda_1=\lambda_2$ et $\mu_2=1+\mu_1$. Les solutions C^2 sont :

$$\forall x\in[-\pi,0],\ y(x)=\lambda_1\cos x+\mu_1\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

et

$$\forall x\in[0,\pi],\ y(x)=\lambda_1\cos x+(1+\mu_1)\sin x-\frac{1}{2}x\cos x,$$

où λ_1 et μ_1 sont réels.

Exercice 02

1. Soit une suite (P_n) de polynômes définie par :

$$P_0 = 2,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

Montrons la proposition $\mathcal{P}_n$: P_n est unitaire et de degré n pour $n \geqslant 1$.
On fait une récurrence. On montre que la proposition est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. En effet, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 2$.
Puis, on suppose que

$$P_k = X^k + Q_k, \text{ avec } Q_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$$

pour tout k entier entre 1 et $n+1$. Alors :

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n = X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - X^n - Q_n = X^{n+2} + XQ^{n+1} - X^n.$$

Comme $XQ^{n+1} - X^n$ est un polynôme de degré au plus $n+1$, la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.
2. On fait encore une récurrence en montrant d'abord que c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
En effet,

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ P_0\left(z + \tfrac{1}{z}\right) = z^0 + \frac{1}{z^0} = 2.$$

Et :

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ P_1\left(z + \tfrac{1}{z}\right) = z^1 + \frac{1}{z^1} = z + \frac{1}{z}.$$

Supposons vrai jusqu'à $n+1$,

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ P_{n+2}\left(z + \tfrac{1}{z}\right) = \left(z + \tfrac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z + \tfrac{1}{z}\right) - P_n\left(z + \tfrac{1}{z}\right).$$

Soit :

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ P_{n+2}\left(z + \tfrac{1}{z}\right) = \left(z + \tfrac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \tfrac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \tfrac{1}{z^n}\right).$$

En développant,

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ P_{n+2}\left(z + \tfrac{1}{z}\right) = z^{n+2} + \tfrac{1}{z^{n+2}}.$$

3. On commencera par résoudre dans $\mathbf{C}$: $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0$, c'est-à-dire :

$$z^{2n} = -1.$$

Alors $z^{2n} = e^{i\pi + i2k\pi}$, avec $k \in \mathbf{Z}$.
En posant $z = re^{i\theta}$, on a :

$$2n\theta = \pi + 2k\pi,$$

avec $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Alors : $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$, avec $k \in [\![0, 2n-1]\!]$.
Alors tous les complexes de la forme

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2n} + i\frac{k\pi}{n}\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{2n} - i\frac{k\pi}{n}\right)$$

avec $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ sont racines de P_n.
C'est-à-dire tous les réels de la forme

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

avec $k \in [\![0, 2n-1]\!]$.
Par propriété du *cos*, ces valeurs sont toutes en double (et comme P_n est de degré n et a au plus n racines), les racines de P_n sont :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.