TELEEXERCICES01-T08
Enoncé

Exercice 01

Déterminer deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E(\mathbb{R})$ de (E).

Indications :

On pose bien entendu au départ $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec un rayon de convergence R à déterminer plus tard.

On utilise : $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$ pour $t \in]-R, R[$.

Quand on a remplaçé dans $y''(t) + ty'(t) + y(t)$, on a trois sommes et l'on met chacune sous la forme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n t^n$, après éventuellement un changement d'indice. Comme $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \times t^n$, on identifie les coefficients de chaque membre (deux développements en série entière sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux) et on obtient une relation ici entre a_{n+2} et a_n.

On pose $n = 2p$ et $n = 2p+1$ et après une récurrence descendante, on a a_{2p} en fonction de a_0 et a_{2p+1} en fonction de a_1. Ici pas de conditions initiales donc pas de a_0 et de a_1 determinables.

On en déduit que $y(t)$ est combinaison linéaire de deux développements en série entière $y_{p_1}(t)$ et $y_{p_2}(t)$ à trouver.

Il reste à trouver les rayons de convergence de ces deux développement en série entière et de conclure.

Exercice 02

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + I_n = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé canoniquement.

1. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres (complexes) possibles de M.
3. Soit $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que : $\text{Im}\,(f - jId) \subset \text{Ker}\,(f - j^2 Id)$.
   Puis que $\mathbb{C}^n = \text{Ker}\,(f - j^2 Id) \oplus \text{Ker}\,(f - jId)$.
4. Montrer que M est diagonalisable.

Indications :

1. Cette question illustre une des méthodes pour trouver l'inverse d'une matrice. Quand on a un polynôme annulateur de M comme ici, il suffit d'écrire $M^2 + M + I_n = 0$ sous la forme $MN = I_n$ et donc $N = M^{-1}$.

2. On pose $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ et on multiplie $M^2 + M + I_n = 0$ par X puis on remplace MX par λX et $M^2 X$ par $\lambda^2 X$. On a alors un polynôme du second degré d'inconnue λ à résoudre.

3. Pour l'inclusion, il suffit de prendre $\vec{x} \in \text{Im}\,(f - jId)$, donc de dire qu'il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} = f(\vec{y}) - j\vec{y}$ et de montrer que $\vec{x} \in \text{Ker}\,(f - j^2 Id)$, c'est-à-dire que $f(\vec{x}) - j^2 \vec{x} = 0$.

Pour montrer ensuite que $\mathbb{C}^n = \text{Ker}\,(f - j^2 Id) \oplus \text{Ker}\,(f - jId)$, on commence par montrer que la somme est directe : $\text{Ker}\,(f - j^2 Id) \cap \text{Ker}\,(f - jId) = \{\vec{0}\}$.

Puis, pour montrer que $\mathbb{C}^n = \text{Ker}\,(f - j^2 Id) + \text{Ker}\,(f - jId)$, il faut montrer que tout vecteur de $\mathbb{C}^n$ est somme d'un vecteur de $\text{Ker}\,(f - j^2 Id)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}\,(f - jId)$.

Pour cela, on raisonne par analyse-synthèse.

Supposons qu'une telle décomposition existe, alors : (1) $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, avec $\vec{u} \in \text{Ker}\,(f - j^2 Id)$ et $\vec{v} \in \text{Ker}\,(f - jId)$.

On écrit $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Appelons (2) cette égalité. Puis en combinant (1) et (2), on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{x}$ et de $f(\vec{x})$.

Il reste à montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi définis à partir de $\vec{x}$ sont dans les bons sous-espaces vectoriels.

4. Il reste à conclure.

Correction

Exercice 01

Déterminons deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : \, y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

On va en déduire ensuite l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E(\mathbb{R})$ de (E).

Posons comme annoncé au départ $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec un rayon de convergence R à déterminer plus tard. On utilise :

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \text{ pour } t \in]-R, R[.$$

Remplaçons dans $y''(t) + ty'(t) + y(t)$, cette expression devient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Un glissement d'indice dans la première somme et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \times t^n$, on identifie les coefficients de chaque membre (deux développements en série entière sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux) et alors pour $n = 0$, on a : $2a_2 + a_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n = 0.$$

Cela donne : $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$.
On remarque que $2a_2 + a_0 = 0$ se retrouve dans l'égalité précédente. Donc :

$$\forall n \geqslant 2, \, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}.$$

On pose $n = 2p$ et :

$$a_{2p} = \frac{-1}{2p} a_{2p-2} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} a_{2p-4} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} \times \ldots \times \frac{-1}{2} a_0.$$

Donc :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0.$$

On fait de même pour $n = 2p+1$. On a : $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1$.
Ainsi, pour tout $t \in]-R, \, R[$,

$$y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1 t^{2p+1}$$

Donc si l'on pose

$$y_{p_1}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} t^{2p} \text{ et } y_{p_2}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} t^{2p+1},$$

on a : $y(t) = a_0 y_{p_1}(t) + a_1 y_{p_2}(t)$.
On peut ensuite vérifier que les rayons de convergence de $y_{p_1}(t)$ et de $y_{p_2}(t)$ sont $+\infty$.
Il suffit de poser $u_p(t) = \dfrac{(-1)^p}{2^p p!} t^{2p}$ et $v_p(t) = \dfrac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$.
Puis de faire les rapports $\left|\dfrac{u_{p+1}(t)}{u_p(t)}\right|$ et $\left|\dfrac{v_{p+1}(t)}{v_p(t)}\right|$ et de faire tendre p vers $+\infty$. On trouve 0 pour limite.
Ensuite, les deux fonctions $t \mapsto y_{p_1}(t)$ et $t \mapsto y_{p_2}(t)$ sont indépendantes et comme on sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimension 2, les solutions de cette équation sont exactement les combinaisons linéaires de $t \mapsto y_{p_1}(t)$ et de $t \mapsto y_{p_2}(t)$.
On peut remarquer que $y_{p_1}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 02

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + I_n = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé canoniquement.
1. Montrons que M est inversible et déterminons M^{-1}.
On a un polynôme annulateur de M comme ici, il suffit d'écrire $M^2 + M + I_n = 0$ sous la forme $MN = I_n$ et donc $N = M^{-1}$.
En effet :

$$M^2 + M = -I_n \Rightarrow M(M + I_n) = -I_n \Rightarrow M(-M - I_n) = I_n.$$

Donc : $M^{-1} = -M - I_n$.
2. Déterminons les valeurs propres (complexes) possibles de M.
On pose $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ et on multiplie $M^2 + M + I_n = 0$ par X, ce qui donne :

$$M^2 X + MX + X = 0 \Rightarrow \lambda^2 X + \lambda X + X = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) X = 0.$$

Comme $X \neq 0$, il reste : $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Les solutions sont j et j^2, avec $j = e^{2i\pi/3}$.
3. • Montrons que : $\operatorname{Im}(f - jId) \subset \operatorname{Ker}(f - j^2 Id)$.
Prenons $\vec{x} \in \operatorname{Im}(f - jId)$, donc on sait qu'il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} = f(\vec{y}) - j\vec{y}$.
Montrons alors que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f - j^2 Id)$, c'est-à-dire que $f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = 0$.
On a :

$$f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = f(f(\vec{y}) - j\vec{y}) - j^2(f(\vec{y}) - j\vec{y}).$$

Il reste à développer :

$$f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = f^2(\vec{y}) - jf(\vec{y}) - j^2 f(\vec{y}) + \vec{y},$$

car $j^3 = 1$. Puis on remplace $f^2(\vec{y})$ par $-f(\vec{j}) - \vec{j}$ et on a :

$$f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = -f(\vec{j}) - \vec{j} - jf(\vec{y}) - j^2 f(\vec{y}) + \vec{y},$$

soit :

$$f(\vec{x}) - j^2\vec{x} = -(1 + j + j^2) f(\vec{j}) = 0$$

car $1 + j + j^2 = 0$. q.e.d
• Montrons que $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(f - j^2 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - jId)$.
On commence par montrer que la somme est directe : $\operatorname{Ker}(f - j^2 Id) \cap \operatorname{Ker}(f - jId) = \{\vec{0}\}$.
En effet, si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f - j^2 Id) \cap \operatorname{Ker}(f - jId)$, alors $f(\vec{x}) = j^2\vec{x} = j\vec{x}$ et donc $\vec{x} = \vec{0}$.
Puis, pour montrer que $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(f - j^2 Id) + \operatorname{Ker}(f - jId)$, montrons que tout vecteur de $\mathbb{C}^n$ est somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f - j^2 Id)$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f - jId)$.
Pour cela, on raisonne par analyse-synthèse.
Supposons qu'une telle décomposition existe, alors :

$$(1)\ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v},$$

avec $\vec{u} \in \operatorname{Ker}(f - j^2 Id)$ et $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(f - jId)$.
On écrit $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. On a :

$$(2)\ \ f(\vec{x}) = j^2\vec{u} + j\vec{v}.$$

Puis en combinant (1) et (2), on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{x}$ et de $f(\vec{x})$.
En effet,

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{x} & = & \vec{u}+\vec{v} \\ f(\vec{x}) & = & j^2\vec{u}+j\vec{v} \end{array}\right. \Rightarrow \vec{u}=\frac{1}{j-j^2}\left(j\vec{x}-f(\vec{x})\right) \text{ et } \vec{v}=\frac{1}{j-j^2}\left(f(\vec{x})-j^2\vec{x}\right).$$

Donc soit $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$. Posons maintenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

$$\vec{u}=\frac{1}{j-j^2}\left(j\vec{x}-f(\vec{x})\right) \text{ et } \vec{v}=\frac{1}{j-j^2}\left(f(\vec{x})-j^2\vec{x}\right).$$

Alors $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$. Il reste à montrer que $\vec{u}\in \mathrm{Ker}\,(f-j^2Id)$ et $\vec{v}\in \mathrm{Ker}\,(f-jId)$, ce qui revient de même de montrer que $j\vec{x}-f(\vec{x})\in \mathrm{Ker}\,(f-j^2Id)$ et que $f(\vec{x})-j^2\vec{x}\in \mathrm{Ker}\,(f-jId)$.
Montrons que $j\vec{x}-f(\vec{x})\in \mathrm{Ker}\,(f-j^2Id)$ c'est-à-dire montrons que $f(j\vec{x}-f(\vec{x}))-j^2(j\vec{x}-f(\vec{x}))=0$.
En développant, on a :

$$f(j\vec{x}-f(\vec{x}))-j^2(j\vec{x}-f(\vec{x}))=jf(\vec{x})-f^2(\vec{x})-j^3\vec{x}+j^2f(\vec{x})=jf(\vec{x})+f(\vec{x})+\vec{x}-j^3\vec{x}+j^2f(\vec{x}).$$

C'est bien $\vec{0}$ car $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.
L'autre inclusion se fait de même.
4. $\mathbb{C}^n=\mathrm{Ker}\,(f-j^2Id)\oplus\mathrm{Ker}\,(f-jId)$ permet d'écrire la matrice de f sous forme diagonale avec des j^2 et des j.