TELEEXERCICES02-T02
Enoncé

Exercice 01

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

1. Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.
   On note dans la suite ϕ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
   (i) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\phi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
   (ii) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
   $$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$
6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Indications :
1. Ne pas oublier de montrer d'abord la linéarité. En faisant cela, il suffit alors de montrer que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par ϕ sont toujours dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Si vous avez déjà les images $\phi_n(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est rapide.
3. Plusieurs méthodes s'offrent à vous. Soit on utilise le déterminant de ϕ_n et c'est alors le plus rapide, soit vous montrez que le noyau est nul (car on est en dimension finie), soit vous montrez que le rang de la matrice est $n+1$, soit vous explicitez la fonction réciproque, ce qui permet de s'avancer pour la suite.
4. On veut montrer l'existence et l'unicité d'une famille de $n+1$ polynômes dont on connaît les images par ϕ_n. Cette famille doit être une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On utilise bien entendu fortement le fait que ϕ_n est un automorphisme.
5. On demande de prouver une égalité entre des polynômes d'endomorphismes. La finalité de cette question est d'expliciter l'inverse de $Id - \delta$.
6. On explicite ici les polynômes $s_0, ..., s_n$ dont on a prouvé l'existence et l'unicité à la question **4)**. On utilise la question **5)** et donc le fait que l'on sait expliciter $\phi_n^{-1} = (Id - \delta)^{-1}$.

Exercice 02

On dit qu'une v.a.r X telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable est quasi-certaine s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$P(X = a) = 1.$$

Montrer que X est quasi-certaine si et seulement si $V(X) = 0$.

Indications :
Pour le sens direct, on calculera $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ et pour le sens réciproque, on supposera $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbf{N}\}$, les x_n étant tous distincts et on posera $p_n = P(X = x_n)$. On exprimera $V(X) = E((X - E(X))^2)$ sous forme d'une somme de termes positifs et on exploitera $V(X) = 0$ en remarquant que comme $\sum p_n = 1$, et donc que les p_n ne peuvent pas être tous nuls.