TELEEXERCICES02-T04

Enoncé

Exercice 01

Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\, dt.$$

Indications :
Inutile de vérifier que cette intégrale converge. Dire pourquoi. Pour le calcul, on tentera le changement de variable $x = \cos t$.

Exercice 02

Soit le plan P d'équation dans $\mathbf{R}^3$, muni de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct :

$$x + 2y - 3z = 0.$$

1. Trouver un vecteur unitaire orthogonal à P.
2. Déterminer l'image d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur $P^\perp$.
3. Déterminer l'image d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur P.
4. Si p_P est la projection orthogonale sur P, montrer que la symétrie orthogonale s_P par rapport à P vérifie :

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3,\ s(\vec{x}) = 2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}.$$

   Déterminer alors la matrice de la symétrie orthogonale s dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Indications :
1. On rappelle que le vecteur (a, b, c) est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
2. On rappelle que si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire d'une droite vectorielle D et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de l'espace, le vecteur $(\vec{x}.\vec{n})\vec{n}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur D.
Ici $P^\perp$ est une droite et on cherche la projection orthogonale $p_{P^\perp}$.
3. Pour la projection orthogonale p_P sur P, on peut déterminer une base orthonormée de P mais c'est un peu long, autant remarquer que $\vec{x} = p_{P^\perp}(\vec{x}) + p_P(\vec{x})$.
4. On posera $\phi(\vec{x}) = 2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}$ et on montrera que $s(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P$ et de même $s(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P^\perp$.
Puis pour la matrice, on remplace $\vec{x}$ par (x, y, z) puis on écrit le vecteur $2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}$ en fonction de x, y et z, ce qui donne un vecteur de la forme $(a_1 x + a_2 y + a_3 z, b_1 x + b_2 y + b_3 z, c_1 x + c_2 y + c_3 z)$ puis les coefficients de la matrice de s sont a_1, a_2, a_3 pour la ligne L_1, b_1, b_2, b_3 pour la ligne L_2, c_1, c_2, c_3 pour la ligne L_3.