TELEEXERCICES02-T02
Enoncé

Exercice 01

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

1. Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.
   On note dans la suite ϕ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
   (i) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\phi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
   (ii) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
   $$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$
6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Indications :
1. Ne pas oublier de montrer d'abord la linéarité. En faisant cela, il suffit alors de montrer que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par ϕ sont toujours dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Si vous avez déjà les images $\phi_n(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est rapide.
3. Plusieurs méthodes s'offrent à vous. Soit on utilise le déterminant de ϕ_n et c'est alors le plus rapide, soit vous montrez que le noyau est nul (car on est en dimension finie), soit vous montrez que le rang de la matrice est $n + 1$, soit vous explicitez la fonction réciproque, ce qui permet de s'avancer pour la suite.
4. On veut montrer l'existence et l'unicité d'une famille de $n + 1$ polynômes dont on connaît les images par ϕ_n. Cette famille doit être une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On utilise bien entendu fortement le fait que ϕ_n est un automorphisme.
5. On demande de prouver une égalité entre des polynômes d'endomorphismes. La finalité de cette question est d'expliciter l'inverse de $Id - \delta$.
6. On explicite ici les polynômes $s_0, ..., s_n$ dont on a prouvé l'existence et l'unicité à la question **4)**. On utilise la question **5)** et donc le fait que l'on sait expliciter $\phi_n^{-1} = (Id - \delta)^{-1}$.

Exercice 02

On dit qu'une v.a.r X telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable est quasi-certaine s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$P(X = a) = 1.$$

Montrer que X est quasi-certaine si et seulement si $V(X) = 0$.

Indications :
Pour le sens direct, on calculera $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ et pour le sens réciproque, on supposera $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbf{N}\}$ et on posera $p_n = P(X = x_n)$. On exprimera $V(X) = E((X - E(X))^2)$ sous forme d'une somme de termes positifs et on exploitera $V(X) = 0$ en remarquant que comme $\sum p_n = 1$, et donc que les p_n ne peuvent pas être tous nuls.

Correction

Exercice 01

1. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

Pour montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme, il faut montrer la linéarité de ϕ et montrer que l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité de ϕ

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - P' - \lambda Q' = P - P' + \lambda\left(Q - Q'\right).$$

On retrouve $\phi(P) + \lambda\phi(Q)$.

La restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ est elle un endomorphisme ?

$\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la base $(1, X, ..., X^n)$.
Il suffit de vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = X - 1.$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

Le polynôme $X^k - kX^{k-1}$ est de degré k pour tout k compris entre 1 et n. Donc $\phi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus n pour tout entier k compris entre 0 et n.

On peut conclure : ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme, noté ϕ_n.

2) On veut expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire dans la base $\beta = (1, X, X^2, ..., X^n)$. On utilise la question précédente. On sait que $\phi(1) = 1$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On en déduit chaque colonne de la matrice $M_\beta(\phi_n)$, matrice représentative de ϕ dans la base canonique β de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$M_\beta(\phi_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On veut démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 01

Si vous connaissez les déterminants d'ordre n, on peut remarquer que le déterminant de $M_\beta(\phi_n)$ est triangulaire supérieure et est donc égal au produit des ses éléments diagonaux qui sont tous des 1.
Ainsi, $\mathsf{Det}\, M_\beta(\phi_n) = 1 \neq 0$ et ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 02

On peut prouver que le noyau de ϕ_n est nul. En effet, si tel est le cas, comme ϕ_n est un endomorphisme en dimension finie, ϕ_n qui est alors injectif est bijectif (par le théorème du rang).
Soit donc $P \in \operatorname{Ker}\phi_n$, on a : $P = P'$. Or si P est de degré $k \geqslant 1$, P' est de degré $k-1$. Donc si $P \in \operatorname{Ker}\phi_n$, P est constant et comme P' est alors nul, $\operatorname{Ker}\phi_n$ est réduit au polynôme nul.

Méthode 03

On peut montrer que $M_\beta(\phi_n)$ est de rang $n + 1$, ce qui permet alors de dire que ϕ_n est surjectif donc bijectif (endomorphisme en dimension finie).

Si l'on fait les opérations élémentaires simultanées :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2,\ ...,\ C_n \leftarrow C_n + nC_{n-1},$$

la matrice $M_\beta(\phi_n)$ se transforme en I_{n+1}, qui est bien de rang $n+1$.

Méthode 04

On peut expliciter l'inverse de ϕ_n, ce qui prouvera son existence et par la même occasion que ϕ_n est bijectif.

Soit $Q = P - P' = \phi_n(P)$. En dérivant, $Q' = P' - P''$, puis de manière générale,

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

Et enfin $Q^{(n)} = P^{(n)}$ car P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de degré au plus n. En sommant toutes ces égalités, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = P - P' + ... + P^{(n-1)} - P^{(n)} + P^{(n)} = P.$$

Tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ possède donc un antécédent unique qui est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Ainsi, ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Comme ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$, élément de $\mathbb{R}_n[X]$, possède donc un antécédent unique par ϕ_n que l'on peut appeler s_i. Et $s_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement, il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.$$

Par ailleurs, ϕ_n^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car cette famille est formée de $n+1$ polynômes (non nuls) tous de degrés différents dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, on peut conclure que l'image de cette base par l'automorphisme ϕ_n^{-1} (qui est la famille $(s_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) est encore une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut conclure :

$$(s_0, s_1, ..., s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

5) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. La quantité :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n)$$

vaut, en la développant :

$$Id + \delta + ... + \delta^n - \delta - ... - \delta^n - \delta^{n+1}.$$

Or $\delta^{n+1} = 0$ car la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est nulle. Donc :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$

6) On remarque que $\phi_n = Id - \delta$ et donc $\phi_n^{-1} = Id + \delta + ... + \delta^n$. On retrouve l'expression trouvée à la quatrième méthode du développement de la question **3)**.

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (Id + \delta + ... + \delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

Alors, pour i fixé dans $[\![0, n]\!]$,

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + i\frac{X^{i-1}}{i!} + ... + i(i-1)...(i-(i-1))\frac{X^{i-i}}{i!}.$$

C'est-à-dire :

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\frac{X^i}{i!}+\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}+...+\frac{X^0}{0!}.$$

On peut conclure :

$$\forall i\in [\![0,n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)=\sum_{k=0}^{i}\frac{X^k}{k!}.$$

Exercice 02

• **Sens direct**. On calcule $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$, on a :

$$E(X)=aP(X=a)=a \text{ et } E(X^2)=a^2.$$

Donc on a bien $V(X)=0$.

• **Sens réciproque**. On suppose $X(\Omega)=\{x_n,\, n\in\mathbf{N}\}$, les x_n étant tous distincts et on pose

$$p_n=P(X=x_n).$$

Exprimons $V(X)=E((X-E(X))^2)$ sous forme d'une somme de termes positifs. On a :

$$V(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n-E(X))^2p_n=0.$$

Cela implique que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $(x_n-E(X))^2p_n=0$.
Comme $\sum p_n=1$, et donc les p_n ne peuvent pas être tous nuls, il existe $q\in\mathbf{N}$ tel que $p_q\neq 0$ et alors $x_q=E(X)$.
Donc, pour tout $n\neq q$, $(x_n-E(X))^2p_n=0$ implique $p_n=0$ car $x_n-E(X)$ est non nul.
Donc $p_q=1$ et on a : $P(X=x_q)=1$. La loi X est quasi-certaine.