TELEEXERCICES02-T03
Enoncé

Exercice 01

On considère la fonction f de période $T = 2\pi$ telle que $f(t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$ et $f(-\pi) = 0$.

1. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Le signal f est-il pair ou impair ?
3. Déterminer la série de Joseph Fourier $S_f(t)$ de f.
4. A t-on $S_f(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Pourquoi ?
5. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
6. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Indications :
1. Kein Problem.
2. Easy !
3. On rappelle que $S_f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$.
De plus, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

avec $\omega = 2\pi/T$.
4. et **5.** On appliquera le théorème de Johann Peter Gustav Dirichlet à la bonne valeur de t.
6. Penser fortement à Marc-Antoine Parseval.

Exercice 02

Déterminer les solutions de $z^5 = 1 + i$.

Indications :
On commencera par mettre $1 + i$ sous forme trigonométrique.

Correction

Exercice 01

1. On obtient des segments parallèles à $y = x$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
2. On voit que f est impaire.
3. On rappelle que $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$.
Ici $a_0 = a_n = 0$. Il reste à calculer pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

avec $\omega = 2\pi/T$.
Alors :

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt.$$

On fait une IPP :

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt = -\int_0^{\pi} \frac{-\cos(nt)}{n}\, dt + \left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}.$$

Soit :

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt = \left[\frac{-\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

Et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Il reste : $\forall t \in \mathbf{R}$, $S_f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$.
4. Le théorème de Johann Peter Gustav Dirichlet dit que comme f est de classe C^1 par morceaux que $S_f(t)$ vaut $(f(t^+) + f(t^-))/2$. Comme $f(\pi) = \pi$ et $S_f(\pi) = 0$, il existe des points où $S_f(t) \neq f(t)$.
5. Par contre là où f est continue, $S_f(t) = f(t)$. En particulier pour $t = \frac{\pi}{2}$.
On a :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Alors arrangeons $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.
Si $n = 2p$, cela fait 0.
Si $n = 2p + 1$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2p+1)\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p.$$

Ainsi :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{2p+1+1}}{2p+1}(-1)^p = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Il reste :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Pensons fortement à Marc-Antoine Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_T^{a+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{2}.$$

Cela donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Et donc :

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}.$$

Ou encore :

$$\frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}.$$

Il reste :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 02

On commence par mettre $1+i$ sous forme trigonométrique. On a :

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Alors en posant $z = re^{i\theta}$, on a :

$$z^5 = 1+i \Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i2k\pi},\ k \in \mathbf{Z}.$$

On a :

$$z^5 = 1+i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} r^5 & = & \sqrt{2} \\ 5\theta & = & \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{array}\right. .$$

Ou encore :

$$z^5 = 1+i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} r & = & 2^{\frac{1}{10}} \\ \theta & = & \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in [\![0,4]\!] \end{array}\right. .$$

On en déduit les 5 solutions.