# TELEEXERCICES02-T04
# Enoncé

---

**Exercice 01**

Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\, dt.$$

**Indications :**
Inutile de vérifier que cette intégrale converge. Dire pourquoi. Pour le calcul, on tentera le changement de variable $x = \cos t$.

---

**Exercice 02**

Soit le plan $P$ d'équation dans $\mathbf{R}^3$, muni de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct :

$$x + 2y - 3z = 0.$$

1. Trouver un vecteur unitaire orthogonal à $P$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur $P^{\perp}$.
3. Déterminer l'image d'un vecteur $(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur $P$.
4. Si $p_P$ est la projection orthogonale sur $P$, montrer que la symétrie orthogonale $s_P$ par rapport à $P$ vérifie :

   $$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3,\ s(\vec{x}) = 2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}.$$

   Déterminer alors la matrice de la symétrie orthogonale $s$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

**Indications :**
**1.** On rappelle que le vecteur $(a, b, c)$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
**2.** On rappelle que si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire d'une droite vectorielle $D$ et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de l'espace, le vecteur $(\vec{x}.\vec{n})\vec{n}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $D$.
Ici $P^{\perp}$ est une droite et on cherche la projection orthogonale $p_{P^{\perp}}$.
**3.** Pour la projection orthogonale $p_P$ sur $P$, on peut déterminer une base orthonormée de $P$ mais c'est un peu long, autant remarquer que $\vec{x} = p_{P^{\perp}}(\vec{x}) + p_P(\vec{x})$.
**4.** On posera $\phi(\vec{x}) = 2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}$ et on montrera que $s(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P$ et de même $s(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P^{\perp}$.
Puis pour la matrice, on remplace $\vec{x}$ par $(x, y, z)$ puis on écrit le vecteur $2\, p_P(\vec{x}) - \vec{x}$ en fonction de $x$, $y$ et $z$, ce qui donne un vecteur de la forme $(a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y = c_3z)$ puis les coefficients de la matrice de $s$ sont $a_1, a_2, a_3$ pour la ligne $L_1$, $b_1, b_2, b_3$ pour la ligne $L_2$, $c_1, c_2, c_3$ pour la ligne $L_3$.

# Correction

### Exercice 01

Calculons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\, dt.$$

Inutile de vérifier que cette intégrale converge car la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}$ est continue sur le fermé $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Pour le calcul, on fait le changement de variable $x = \cos t$. On a :

$$dx = -\sin t\, dt.$$

Alors :

$$I = -\int_1^0 \frac{\sin^2 t}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx$$

en remplaçant $-\sin t\, dt$ par $dx$. Et donc :

$$I = -\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\, dx = -1 + 2\left[\arctan x\right]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

### Exercice 02

Soit le plan $P$ d'équation dans $\mathbf{R}^3$, muni de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct :

$$x + 2y - 3z = 0.$$

**1.** Trouvons un vecteur unitaire orthogonal à $P$.
On rappelle que le vecteur $(a, b, c)$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
Donc le vecteur cherché est $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$.
**2.** Déterminons l'image d'un vecteur $(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur $P^\perp$.
On rappelle que si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire d'une droite vectorielle $D$ et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de l'espace, le vecteur $(\vec{x}.\vec{n})\vec{n}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $D$.
Ici $P^\perp$ est une droite et on cherche la projection orthogonale $p_{P^\perp}$.

$$p_{P^\perp}(\vec{x}) = (\vec{x}.\vec{n})\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(x, y, z).(1, 2, -3)\right)\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3).$$

Et donc :

$$p_{P^\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{14}(x + 2y - 3z)(1, 2, -3) = \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

**3.** Déterminons l'image d'un vecteur $(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$ par la projection orthogonale sur $P$.
Pour la projection orthogonale $p_P$ sur $P$, on peut déterminer une base orthonormée de $P$ mais c'est un peu long, autant remarquer que $\vec{x} = p_{P^\perp}(\vec{x}) + p_P(\vec{x})$.

$$p_P(\vec{x}) = \vec{x} - p_{P^\perp}(\vec{x}) = (x, y, z) - \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

Cela donne :

$$p_P(\vec{x}) = \frac{1}{14}(14x, 14y, 14z) - \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

Puis :

$$p_P(\vec{x}) = \frac{1}{14}(13x - 2y + 3z, -2x + 10y + 6z, 3x + 6y + 5z).$$

**4.** • Si $p_P$ est la projection orthogonale sur $P$, montrons que la symétrie orthogonale $s_P$ par rapport à $P$ vérifie :

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3,\ s(\vec{x}) = 2\,p_P(\vec{x}) - \vec{x}.$$

On pose $\phi(\vec{x}) = 2\,p_P(\vec{x}) - \vec{x}$.
On a : $s(\vec{x}) = 2\vec{x} - \vec{x} = \vec{x} = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P$.
De même, $s(\vec{x}) = \vec{0} - \vec{x} = \phi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in P^{\perp}$.
Donc $s$ et $\phi$ sont les mêmes endomorphismes sur l'espace entier.

• Déterminons alors la matrice de la symétrie orthogonale $s$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On remplace $\vec{x}$ par $(x, y, z)$ puis on écrit le vecteur $2\,p_P(\vec{x}) - \vec{x}$ en fonction de $x$, $y$ et $z$, ce qui donne un vecteur de la forme $(a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y = c_3z)$ puis les coefficients de la matrice de $s$ sont $a_1, a_2, a_3$ pour la ligne $L_1$, $b_1, b_2, b_3$ pour la ligne $L_2$, $c_1, c_2, c_3$ pour la ligne $L_3$.
On a, pour tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$,

$$s(\vec{x}) = 2\,p_P(\vec{x}) - \vec{x} = \frac{2}{14}(13x - 2y + 3z, -2x + 10y + 6z, 3x + 6y + 5z) - (x, y, z).$$

Et donc :

$$s(\vec{x}) = \frac{1}{7}(13x - 2y + 3z, -2x + 10y + 6z, 3x + 6y + 5z) - \frac{1}{7}(7x, 7y, 7z).$$

Soit :

$$s(\vec{x}) = \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z, -2x + 3y + 6z, 3x + 6y - 2z).$$

On a le résultat. La matrice cherchée est :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$