TELEEXERCICES02-T01
Enoncé

Exercice 01

Pour $n \in \mathbf{N}$, étudier la convergence puis calculer (en commençant par I_0) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt.$$

Indications :
Pour la convergence, on pourra utiliser le fait que si $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(t)\, dt$ existe (avec $b > 0$ fixé) alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\, dt$ existe.
Pour le calcul, on établira une relation entre I_n et I_{n-1} avec une I.P.P pour $n \geqslant 1$.

Exercice 02

Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$:

$$P = X^4 + 2.$$

Indications :
On commencera par déterminer les racines complexes de $z^4 = -2$, en posant $z = re^{i\theta}$ et $-2 = 2e^{i\pi + i2k\pi}$.
Puis, on mettra ces quatre racines sous la forme x_1, $\bar{x_1}$, x_2 et $\bar{x_2}$. Et on utilisera le fait que :

$$(X - x_1)(X - \bar{x_1}) = X^2 - 2Re(x_1)X + |x_1|^2.$$

Correction

Exercice 01

• **Convergence**.
Pour la convergence, utilisons le fait que si $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(t)\,dt$ existe (avec $b > 0$ fixé) alors $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ existe.
Ici $f(t) = t^n e^{-t}$. Et pour tout n entier, la quantité $t^2 f(t) = t^{n+2}e^{-t}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Alors $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[b, +\infty[$ pour tout $b > 0$, on peut conclure.

• **Calcul**.
On a déjà :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Pour la suite du calcul, établissons une relation entre I_n et I_{n-1} avec une I.P.P pour $n \geqslant 1$.

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} nt^{n-1}e^{-t}\,dt + \left[-t^n e^{-t}\right]_0^{+\infty}.$$

Et donc :

$$I_n = nI_{n-1}.$$

Ce qui donne $I_n = n \times (n-1) \times ... \times 1 = n!$

Exercice 02

• **Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$**. On commence par déterminer les racines complexes de $z^4 = -2$, en posant $z = re^{i\theta}$ et $-2 = 2e^{i\pi + i2k\pi}$. On a : $2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi}{4}}$

$$z^4 = -2 \Leftrightarrow r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi + i2k\pi},\ k \in \mathbf{Z}.$$

On a :

$$z^4 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 & = & 2 \\ 4\theta & = & \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

Ou encore :

$$z^4 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} r & = & 2^{\frac{1}{4}} \\ \theta & = & \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in [\![0,3]\!] \end{cases}.$$

On en déduit les 4 solutions.

$$x_1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi}{4}},\ x_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{3\pi}{4}},\ \bar{x_2} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-3\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}ie^{\frac{5\pi}{4}} \text{ et } \bar{x_1} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{7\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-\pi}{4}}.$$

Donc :

$$X^4 + 2 = \left(X - 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-3\pi}{4}}\right).$$

• **Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$**. On utilise

$$(X - x_1)(X - \bar{x_1}) = X^2 - 2Re(x_1)X + |x_1|^2 \text{ et } (X - x_2)(X - \bar{x_2}) = X^2 - 2Re(x_2)X + |x_2|^2.$$

Cela donne :

$$X^4 + 2 = \left(X^2 - 2Re(x_1)X + |x_1|^2\right)\left(X^2 - 2Re(x_2)X + |x_2|^2\right).$$

C'est-à-dire :

$$X^4 + 2 = \left(X^2 - 2.2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{-1}{2}}X + 2^{\frac{1}{2}}\right)\left(X^2 + 2.2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{-1}{2}}X + 2^{\frac{1}{2}}\right).$$

Soit encore :

$$X^4 + 2 = \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}}X + 2^{\frac{1}{2}}\right)\left(X^2 + 2^{\frac{3}{4}}X + 2^{\frac{1}{2}}\right).$$

Autre méthode : $X^4 + 2 = (X^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}X^2$ et on factorise.