TELEEXERCICES02-T07
Enoncé

Exercice 01

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A.
2. Montrer que A possède trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 à déterminer.
   On posera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
3. Justifier (sans détailler les sous-espaces propres) le fait que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une base de vecteurs propres de chacun des trois sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$, $E_{\lambda_2}(A)$ et $E_{\lambda_3}(A)$.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Justifier la formule $D = P^{-1}AP$, sans calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
7. Calculer D^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.
8. Justifier la formule : $\forall p \in \mathbf{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$ et en déduire A^p.

Indications :
1. Sehr Klassich. On pourra faire des opérations élémentaires pour factoriser ou développer avec Sarrus.
2. Même si vous avez fait Pierre Sarrus, il doit y avoir des racines évidentes visibles.
3. C'est une condition suffisante de diagonalisation à citer.
4. Par exemple pour $E_{\lambda_1}(A)$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on cherche x, y et z tels que $AX = \lambda_1 X$.
5. Les colonnes de P sont censés être des bases des sous-espaces propres. Cela permet de vérifier la question précédente.
6. On peut inverser un système ou faire Gauβ-Jordan.
8. C'est une récurrence puis un produit de trois matrices.

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle :

$$ty'(t) - y(t) = t^3.$$

Indications :
On mettra l'équation sous la forme $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t^2$ puis on résoudra l'équation homogène associée, on appelera $y_h(t)$ une base des solutions puis on apppliquera la méthode de variation de la constante.
On pose $y_p(t) = K(t)y_h(t)$ et on remplace dans $y_p'(t) - \frac{1}{t}y_p(t) = t^2$.
On obtient$K'(t)$ puis $K(t)$.