TELEEXERCICES02-T06
Enoncé

Exercice 01

1. Étudier la convergence de la suite définie par :
$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$
en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On considère maintenant la série de même terme général u_n.
   (a) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) **On prend les deux valeurs de a et de b pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.**
   Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Indications :
1. La technique est de mettre n en facteur dans $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour faire apparaître $1/n$ puis on utilise le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et on applique pour avoir le $DL_1(+\infty$ de $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ et de $\sqrt{1+\frac{2}{n}}$.
En terme clair, on arrive à la forme :
$$u_n = \alpha\sqrt{n} + \beta\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),$$
où α et β sont en fonction de a et de b.
2-a On fait comme à la question précédente mais ici on effectue le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Et on applique pour avoir le $DL_2(+\infty)$ de $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ et de $\sqrt{1+\frac{2}{n}}$.
En terme clair, on arrive à la forme :
$$u_n = \alpha\sqrt{n} + \beta\frac{1}{\sqrt{n}} + \gamma\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
où α, β, γ sont en fonction de a et de b.
Attention, il faut discuter après selon les valeurs de a et de b, et distinguer la divergence grossière de la divergence non grossière et enfin de la convergence.
On devra trouver une seule valeur pour a et une seule pour b.
2-b On remarquera que u_n s'écrit comme la somme des deux différences consécutives,
$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.
Puis, on posera $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$.
On réindexe la seconde somme pour que $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$ devienne $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Exercice 02

Déterminer une équation de la tangente à l'arc paramétré $C_1 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sin t} \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ au point $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Indications :
On veut une équation du type $y = ax + b$. On rappelle que $f'(t_0)$ porte la tangente en $M(t_0)$.