TELEEXERCICES02-T08

Enoncé

Exercice 01

Soit X une *v.a.r*, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, on admet que l'on définit Y une *v.a.r* sur le même espace de probabilité par :

$$\forall \omega \in \Omega,\, Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt.$$

1. Ici X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.
   (a) Donner $X(\Omega)$, $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, puis $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$ et sa loi.
2. Ici $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$.
   Donner la loi de Y ainsi que $E(Y)$.

Indications :
1. Ici, on suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Le but est d'en déduire pour ce choix de X la loi de Y.
Ici, c'est juste pour placer au départ une question de cours ! On demande de préciser ensuite $Y(\Omega)$, ce qui est indispensable avant de déterminer la loi de Y puis justement cette loi, c'est-à-dire la donnée des $P(Y = x_k)$, pour tout $x_k \in Y(\Omega)$.
On pourra différencier le cas $X(\omega) = 0$ du cas $X(\omega) = k$, pour k fixé dans $[\![1, n]\!]$.
2. Ici, on choisit une loi de probabilité pour X qui n'est pas une loi usuelle. Le but est d'expliciter la loi de Y puis, cerise sur la gâteau, on demande $E(Y)$.
Ne pas oublier de préciser $Y(\Omega)$ ici aussi.

Exercice 02

Étudier et tracer la courbe paramétrée C :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Indications :
On commencera par remarquer que l'on peut remener l'étude à $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
On remarquera les points à tangente verticale et horizontale.
On pourra remarquer l'existence de points doubles qui se déterminent par les symétries.