TELEEXERCICES02-T05
Enoncé

Exercice 01

1. On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$
Déterminer le polynôme caractéristique de A et diagonaliser A.
2. Déterminer les couples $(x_1,\, x_2)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & -2\,x_1(t) + 4\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -3\,x_1(t) + 5\,x_2(t) \end{array}\right.$$

Indications :
1. Diagonaliser A signifie trouver deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (ici distinctes et réelles) puis trouver la matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres.
On prendra $\lambda_1 < \lambda_2$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.
2. On écrira le système différentiel sous la forme $X'(t) = AX(t)$ avec
$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$
En posant $X(t) = PY(t)$, on aura à résoudre $Y'(t) = DY(t)$.

Exercice 02

Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega) = \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\}$, on pose :
$$\forall\, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\},\; P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. Déterminer a et b tel que $\dfrac{1}{2n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
2. Vérifier que X suit bien une loi de probabilité pour X.
3. La série associée à $E(X)$ est-elle absolument convergente ?

Indications :
1. C'est comme le TELEEXERCICE01. Au moins ça va rentrer.
2. Il s'agit de montrer que $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = 1$.
Pour cela, on posera $S_N = \displaystyle\sum_{n=-2}^{-N} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(n+1)}$ et on usera de **1** en remplaçant $\dfrac{1}{2n(n+1)}$ dans chacune des deux sommes par $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
On aura alors 4 sommes et dans la deuxième et dans la quatrième somme, on fera un glissement d'indice pour que le $1/(n+1)$ devienne un $1/n$.
Puis, on fera tendre N vers $+\infty$.
3. On étudie la somme $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \left|\frac{1}{2(n+1)}\right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{2(n+1)}\right|$ pour savoir si $E(X)$ existe.