TELEEXERCICES02-T05
Enoncé

Exercice 01

1. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer le polynôme caractéristique de A et diagonaliser A.
2. Déterminer les couples $(x_1,\, x_2)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & -2\,x_1(t) + 4\,x_2(t) \\ x_2'(t) &= & -3\,x_1(t) + 5\,x_2(t) \end{cases}$$

Indications :
1. Diagonaliser A signifie trouver deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (ici distinctes et réelles) puis trouver la matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres.
On prendra $\lambda_1 < \lambda_2$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.
2. On écrira le système différentiel sous la forme $X'(t) = AX(t)$ avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

En posant $X(t) = PY(t)$, on aura à résoudre $Y'(t) = DY(t)$.

Exercice 02

Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega) = \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\}$, on pose :

$$\forall\, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1,0\},\; P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

1. Déterminer a et b tel que $\dfrac{1}{2n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
2. Vérifier que X suit bien une loi de probabilité pour X.
3. La série associée à $E(X)$ est-elle absolument convergente ?

Indications :
1. C'est comme le TELEEXERCICE01. Au moins ça va rentrer.
2. Il s'agit de montrer que $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = 1$.
Pour cela, on posera $S_N = \displaystyle\sum_{n=-2}^{-N} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(n+1)}$ et on usera de **1** en remplaçant $\dfrac{1}{2n(n+1)}$ dans chacune des deux sommes par $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
On aura alors 4 sommes et dans la deuxième et dans la quatrième somme, on fera un glissement d'indice pour que le $1/(n+1)$ devienne un $1/n$.
Puis, on fera tendre N vers $+\infty$.
3. On étudie la somme $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \left|\frac{1}{2(n+1)}\right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{2(n+1)}\right|$ pour savoir si $E(X)$ existe.

Correction

Exercice 01

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

• Déterminons le polynôme caractéristique de A. On a :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t+2 & -4 \\ 3 & t-5 \end{vmatrix} = (t+2)(t-5) + 12 = t^2 - 3t + 2.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
• Déterminons la matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 4y & = & x \\ -3x + 5y & = & y \end{array} \right. .$$

On a alors $4y = 3x$, si $x = 4$ alors $y = 3$. On a :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 4y & = & 2x \\ -3x + 5y & = & 2y \end{array} \right. .$$

On a alors $y = x$, si $x = 1$ alors $y = 1$. On a :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi : $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{Diag}(1, 2)$, alors

$$D = P^{-1} A P.$$

2. Déterminons les couples $(x_1,\, x_2)$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -2\, x_1(t) + 4\, x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -3\, x_1(t) + 5\, x_2(t) \end{array} \right.$$

On écrit le système différentiel sous la forme $X'(t) = AX(t)$ avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

En posant $X(t) = PY(t)$, on a :

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow PY'(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t).$$

On a donc à résoudre $Y'(t) = DY(t)$. Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) \\ y_2'(t) & = & 2y_2(t) \end{array} \right.$$

On a deux équations différentielles indépendantes.

Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$y_1(t) = k_1 e^t \text{ et } y_2(t) = k_2 e^{2t}, \text{ où } (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Puis,

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ k_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k_1 e^t + k_2 e^{2t} \\ 3k_1 e^t + k_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

1. Déterminons a et b tel que $\dfrac{1}{2n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. On a :

$$\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} = \frac{2(a+b)n + 2a}{2n(n+1)}.$$

Alors $a + b = 0$ et $2a = 1$. Donc :

$$\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

2. On peut déjà remarquer que $\dfrac{1}{2n(n+1)} > 0$ pour tout n entier relatif différent de -1 et de 0.

Il s'agit ensuite de montrer que $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = 1$.

Pour cela, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=-2}^{-N} \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(n+1)}$. Alors :

$$S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=-2}^{-N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Cela donne :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-2}^{-N}\frac{1}{n} - \sum_{n=-2}^{-N}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\right).$$

Ou encore en faisant un glissement d'indice dans la deuxième et quatrième somme :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-2}^{-N}\frac{1}{n} - \sum_{n=-1}^{-N+1}\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui donne :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-N} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right),$$

quantité qui tend vers 1 quand N tend vers $+\infty$.

3. On étudie la somme $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ pour savoir si $E(X)$ existe. Or en prenant $-n$ à la place de n, $\displaystyle\sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{1}{2(n+1)} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2(n-1)}$ et donc :

$$\sum_{n=-2}^{-\infty}\left|\frac{1}{2(n+1)}\right| + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{2(n+1)}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2(n-1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)}$$

car $\dfrac{1}{2(n+1)} > 0$ pour $n \geqslant 1$. Or les séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{2(n-1)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2(n+1)}$ divergent et il en est de même de leur somme.
Ainsi $E(X)$ n'est pas finie.