TELEEXERCICES02-T06
Enoncé

Exercice 01

1. Étudier la convergence de la suite définie par :
$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$
en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On considère maintenant la série de même terme général u_n.
   (a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) **On prend les deux valeurs de a et de b pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.**
   Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Indications :
1. La technique est de mettre n en facteur dans $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour faire apparaître $1/n$ puis on utilise le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et on applique pour avoir le $DL_1(+\infty$ de $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ et de $\sqrt{1+\frac{2}{n}}$.
En terme clair, on arrive à la forme :
$$u_n = \alpha\sqrt{n} + \beta\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),$$
où α et β sont en fonction de a et de b.
2-a On fait comme à la question précédente mais ici on effectue le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
Et on applique pour avoir le $DL_2(+\infty)$ de $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ et de $\sqrt{1+\frac{2}{n}}$.
En terme clair, on arrive à la forme :
$$u_n = \alpha\sqrt{n} + \beta\frac{1}{\sqrt{n}} + \gamma\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
où α, β, γ sont en fonction de a et de b.
Attention, il faut discuter après selon les valeurs de a et de b, et distinguer la divergence grossière de la divergence non grossière et enfin de la convergence.
On devra trouver une seule valeur pour a et une seule pour b.
2-b On remarquera que u_n s'écrit comme la somme des deux différences consécutives,
$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.
Puis, on posera $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$.
On réindexe la seconde somme pour que $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$ devienne $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Exercice 02

Déterminer une équation de la tangente à l'arc paramétré C_1 : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sin t} \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ au point $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Indications :
On veut une équation du type $y = ax + b$. On rappelle que $f'(t_0)$ porte la tangente en $M(t_0)$.

Correction

Exercice 01

1. La technique est donc de mettre n en facteur dans $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour faire apparaître $1/n$ puis on utilise le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. On commence par écrire :

$$u_n = \sqrt{n}\left[1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right].$$

Puis, on rappelle que le développement limité de $(1+x)^\alpha$, où α est un réel, à l'ordre 1, au voisinage de 0, est : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

On l'applique pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$.

Donc : $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. De même, $\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Il reste à rassembler dans l'expression de u_n et :

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1 + a\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + b\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ce qui donne :

$$u_n = \sqrt{n}\,(1+a+b) + \left(\frac{1}{2}\,a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),$$

en remarquant que $\sqrt{n} \times o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$.

• On remarque que si $1+a+b \neq 0$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 car alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$, quand n tend vers $+\infty$. Et si $1+a+b=0$, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$.

Alors la suite (u_n) est convergente de limite nulle. On peut donc préciser :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 1+a+b>0 \\ -\infty & \text{si} \quad 1+a+b<0 \\ 0 & \text{si} \quad 1+a+b=0 \end{cases}$$

2. Pour étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on utilise le développement précédent en « poussant » le développement limité d'un cran.

a) On rappelle que le développement limité de $(1+x)^\alpha$, où α est un réel, à l'ordre 2, au voisinage de 0, est : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

On l'applique pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Donc, en appliquant avec $x = \dfrac{1}{n}$,

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De même, en appliquant avec $x = \dfrac{2}{n}$,

$$\sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il reste à rassembler dans l'expression de u_n, comme plus haut et :

$$u_n = \sqrt{n}\,(1+a+b) + \left(\frac{1}{2}\,a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{8}\,a - \frac{1}{2}\,b\right)\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

en remarquant que $\sqrt{n} \times o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

• On remarque que si $1+a+b \neq 0$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

• Si maintenant, $1+a+b=0$ et si $\frac{a}{2}+b \neq 0$ alors : $u_n \sim \dfrac{\frac{a}{2}+b}{\sqrt{n}}$.

Et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

• Enfin, supposons que a et b vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 1+a+b & = & 0 \\ a/2+b & = & 0 \end{array}\right.$.

Ce qui donne alors rapidement $a=-2$ et $b=1$. On remplace ces valeurs de a et b dans l'expression de u_n. Le développement limité du terme général u_n devient alors :

$$u_n = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On remarque que u_n est somme de deux termes de séries absolument convergentes.

On peut conclure. $\sum u_n$ converge si et seulement si :

$$a=-2 \text{ et } b=1.$$

b) Pour $a=-2$ et $b=1$, il s'agit de calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Le premier rang n'est pas précisé mais comme u_0 existe, on prendra 0 pour premier indice.

Ici, on calcule : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour tout n puis on fait tendre n vers $+\infty$.

Commençons par remarquer, pour tout entier n, que :

$$u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

On peut donc écrire S_n sous la forme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right).$$

Nous allons réindexer la seconde somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

On remarque que les deux sommes ont leurs termes opposés. Seuls les premiers et derniers indices diffèrent. Ce qui donne :

$$S_n = \sqrt{0} - \sqrt{1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

Il reste à s'occuper de $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. On l'écrit sous la forme :

$$\frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

quantité qui tend vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1.$$

Exercice 02

On remarque que l'arc est régulier en t_0.
Comme : $f'(t) = \left(-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}, \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\right)$, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, le vecteur

$$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

est une direction de la tangente à Γ_1 en $M(t_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Ainsi, la tangente Δ est la droite passant par $M(t_0)$ et parallèle à $y = -x$ (c'est-à-dire la seconde bissectrice).
La pente m de Δ est -1, son équation est : $y = -x + b$.
Comme $M(t_0) \in \Delta$, une équation de Δ est : $y = -x + 2\sqrt{2}$.