TELEEXERCICES02-T07
Enoncé

Exercice 01

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A.
2. Montrer que A possède trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 à déterminer.
   On posera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
3. Justifier (sans cdétailler les sous-espaces propres) le fait que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une base de vecteurs propres de chacun des trois sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$, $E_{\lambda_2}(A)$ et $E_{\lambda_3}(A)$.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Justifier la formule $D = P^{-1}AP$, sans calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
7. Calculer D^p pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$.
8. Justifier la formule : $\forall p \in \mathbf{N}^\star$, $A^p = PD^pP^{-1}$ et en déduire A^p.

Indications :
1. Sehr Klassich. On pourra faire des opérations élémentaires pour factoriser ou développer avec Sarrus.
2. Même si vous avez fait Pierre Sarrus, il doit y avoir des racines évidentes visibles.
3. C'est une condition suffisante de diagonalisation à citer.
4. Par exemple pour $E_{\lambda_1}(A)$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on cherche x, y et z tels que $AX = \lambda_1 X$.
5. Les colonnes de P sont censés être des bases des sous-espaces propres. Cela permet de vérifier la question précédente.
6. On peut inverser un système ou faire Gauβ-Jordan.
8. C'est une récurrence puis un produit de trois matrices.

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle :

$$ty'(t) - y(t) = t^3.$$

Indications :
On mettra l'équation sous la forme $y'(t) - \dfrac{1}{t}y(t) = t^2$ puis on résoudra l'équation homogène associée, on appelera $y_h(t)$ une base des solutions puis on apppliquera la méthode de variation de la constante.
On pose $y_p(t) = K(t)y_h(t)$ et on remplace dans $y_p'(t) - \dfrac{1}{t}y_p(t) = t^2$.
On obtient $K'(t)$ puis $K(t)$.

Correction

Exercice 01

1. Déterminons le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1+X & -2 & 1 \\ 3 & -4+X & 3 \\ 4 & -4 & 4+X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -1 \\ X-1 & X-4 & X-1 \\ 0 & -4 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & X-4 & X-1 \\ 0 & -4 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & X-4 & X-1 \\ 0 & -4 & X \end{vmatrix},$$

ce qui donne : $\chi_A(X) = (X-1)(X)(X-2+4) = X(X-1)(X+2)$.
On a fait successivement : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2, C_3 \leftarrow C_3 + C_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.
2. On a montré ainsi que A possède trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 avec :

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 1.$$

3. Comme χ_A est scindé avec des valeurs propres simples, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminons une base de vecteurs propres de chacun des trois sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$, $E_{\lambda_2}(A)$ et $E_{\lambda_3}(A)$.

Les sous-espaces propres correspondants sont des droites vectorielles.

Pour trouver $E_0(A)$, résolvons le système linéaire d'écriture matricielle $A.X = 0$, en n'oubliant pas que ses solutions forment une droite vectorielle :

$$\begin{cases} -x+2y-z &= 0 \\ -3x+4y-3z &= 0 \\ -4x+4y-4z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z &= 0 \\ -x+y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$E_0(A) = \text{Vect}\{u_0\}$ avec $u_0 = (-1, 0, 1)$.
x est un vecteur de $E_{-2}(A)$ si et seulement si le vecteur colonne X qui le représente dans la base canonique vérifie $A.X = -2.X$ soit $(A + 2\,I_3)X = 0$.
On trouve, après calculs similaires à plus haut : $E_{-2}(A) = \text{Vect}\{u_{-2}\}$ avec $u_{-2} = (0, 1, 2)$.
De même, pour déterminer $E_1(A)$, on se ramène à la résolution du système $(A - I_3)X = 0$.
On trouve $E_1(A) = \text{Vect}\{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 0)$.
5. Les colonnes de P sont des bases des sous-espaces propres. Cela permet de vérifier la question précédente.
En prenant $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient d'après le cours,

$$P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Une inversion de système (ou le calcul de $P^{-1}P = I_3$) donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. On a :

$$D^p = \begin{pmatrix} (-2)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

8. La formule : $\forall p \in \mathbf{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$ se vérifie par récurrence.
Pour $p = 1$, $A^1 = A = PDP^{-1}$ puis on suppose vraie au rang $p \geqslant 1$,

$$A^{p+1} = A^pA = (PD^pP^{-1})A = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}.$$

Après calculs, on a :

$$A^p = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1+(-2)^p & 2-(-2)^p & -1+(-2)^p \\ 2(-2)^p & -2(-2)^p & 2(-2)^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

Résolvons dans $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle :

$$ty'(t) - y(t) = t^3.$$

On met l'équation sous la forme $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t^2$.
• On résout l'équation homogène associée.
On a pour tout $t > 0$, $\frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = \frac{1}{t}$ et donc il existe $K \in \mathbf{R}$,

$$\ln|y(t)| = \ln t + K \Rightarrow y_h(t) = \pm e^K t.$$

Donc on pose $y_h(t) = Kt$.
• Détermination d'une solution particulière de l'équation complète avec la méthode de variation de la constante.
On pose $y_p(t) = K(t)t$ et on remplace dans $y_p'(t) - \frac{1}{t}y_p(t) = t^2$.
On obtient $K'(t)$ puis $K(t)$.
Alors :

$$y_p'(t) = K'(t)t + K(t).$$

Donc :

$$y_p'(t) - \frac{1}{t}y_p(t) = K'(t)t + K(t) - K(t) = K'(t)t = t^2 \Rightarrow K'(t) = t.$$

Il reste : $K(t) = \frac{t^2}{2}$. Alors : $y_p(t) = \frac{t^3}{2}$.
Ainsi : $y(t) = Kt + \frac{t^3}{2}$.