# TELEEXERCICES02-T08
# Enoncé

---

**Exercice 01**

Soit $X$ une *v.a.r*, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, on admet que l'on définit $Y$ une *v.a.r* sur le même espace de probabilité par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt.$$

1. Ici $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $p \in ]0, 1[$.
   (a) Donner $X(\Omega)$, $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, puis $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$ et sa loi.
2. Ici $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$.
   Donner la loi de $Y$ ainsi que $E(Y)$.

**Indications :**
**1.** Ici, on suppose que $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Le but est d'en déduire pour ce choix de $X$ la loi de $Y$.
Ici, c'est juste pour placer au départ une question de cours ! On demande de préciser ensuite $Y(\Omega)$, ce qui est indispensable avant de déterminer la loi de $Y$ puis justement cette loi, c'est-à-dire la donnée des $P(Y = x_k)$, pour tout $x_k \in Y(\Omega)$.
On pourra différencier le cas $X(\omega) = 0$ du cas $X(\omega) = k$, pour $k$ fixé dans $[\![1, n]\!]$.
**2.** Ici, on choisit une loi de probabilité pour $X$ qui n'est pas une loi usuelle. Le but est d'expliciter la loi de $Y$ puis, cerise sur la gâteau, on demande $E(Y)$.
Ne pas oublier de préciser $Y(\Omega)$ ici aussi.

---

**Exercice 02**

Étudier et tracer la courbe paramétrée $C$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \sin\left(\frac{t}{3}\right) \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

**Indications :**
On commencera par remarquer que l'on peut remener l'étude à $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
On remarquera les points à tangente verticale et horizontale.
On pourra remarquer l'existence de points doubles qui se déterminent par les symétries.

# Correction

**Exercice 01**

**1) a)** Ici, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in ]0,1[$. D'après le cours, on a :
$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$,
$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
**b)** Déterminons $Y(\Omega)$ et sa loi.

Ici, $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
Si $X(\omega) = 0$ alors $\max(X(\omega), t) = t$, pour tout $t \in [0,1]$.
Et donc : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.
Si $X(\omega) = k$, où $k$ est fixé dans $[\![1,n]\!]$ alors comme $\max(X(\omega), t) = k$, pour tout $t \in [0,1]$, on a alors l'égalité : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 k\,dt = k$. Finalement,
$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [\![1,n]\!]$.
Dans ce cas, $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X=0) = q^n$ et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(Y=k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On regroupe :
$$\begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \\ P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = q^n \end{cases}.$$

**2)** La somme des probabilités doit faire 1 : $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

- Si $X(\omega) = -1$ ou si $X(\omega) = 0$ alors : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.
- Si $X(\omega) = \frac{1}{2}$, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\,dt = \frac{5}{8}$.
- Si $X(\omega) = 2$, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 2\,dt = 2$.

Réciproquement, on écrit : $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P((X=-1) \cup (X=0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Et : $P\left(Y = \frac{5}{8}\right) = P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$ et $P(Y=2) = P(X=2) = \frac{1}{3}$.

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 2\right\} \text{ et } \begin{cases} P\left(Y = \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} \\ \\ P\left(Y = \frac{5}{8}\right) &= \frac{5}{12} \\ \\ P(Y=2) &= \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Il reste à calculer l'espérance de $Y$. On applique la formule du cours :

$$E(Y) = \frac{1}{2} P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8} P\left(Y = \frac{5}{8}\right) + 2P(Y=2).$$

c'est-à-dire, en utilisant les résultats sur la loi de $Y$,
$E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{25}{96} + \frac{2}{3} = \frac{101}{96}$.

**Exercice 02**

**Étape 1**
Aucune relation simple entre $x$ et $y$ n'apparaît.

**Étape 2**
$x$ et $y$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a déjà développé les réductions éventuelles de l'étude. C'est le dernier exemple qui suit le SF11.5. On a vu qu'il suffit de tracer l'arc pour $t$ décrivant $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, puis de symétriser la portion obtenue par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la portion de l'arc obtenu lorsque $t$ décrit $[0, 3\pi]$.

**Étape 3**
On dresse le tableau de variation sur $J = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
$x$ et $y$ sont dérivables sur $J$.
Alors :
$\forall\, t \in J,\ x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right)$, d'où le tableau de variation conjoint de $x$ et $y$ à droite.

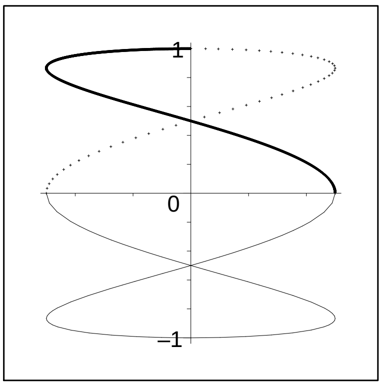
| $t$ | $0$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | - | $0$ | + | $1$ |
| $x(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $1$ |
| $y'(t)$ | $\frac{1}{3}$ | | + | | $0$ |

**Étape 4**
Comme $x'$ s'annule en $t = 0$ et $t = \pi$, $C$ présente une tangente verticale en

$$M(0) = (1, 0) \text{ et } M(\pi) = (-1, \tfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

Comme $y'$ s'annule en $t = \frac{3\pi}{2}$, $\mathcal{C}$ présente une tangente horizontale en $M(\frac{3\pi}{2})$ et $M(\frac{3\pi}{2}) = (0, 1)$.

**Étape 5 et 6**
La partie de l'arc obtenue lorsque $t$ décrit $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ figure en trait fort. Pour la tracer, on part de $M(0)$ avec une tangente verticale. Comme $x$ décroît et $y$ croît, on va vers la gauche tout en montant vers $M(\pi)$. On arrive en ce point avec une tangente verticale. Puis $x$ et $y$ croissent. On va vers la droite tout en montant jusqu'à $M(\frac{3\pi}{2})$, où la tangente est horizontale. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient, en pointillé, la partie de l'arc obtenue lorsque $t$ décrit $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$ ; par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on obtient, en trait plein, la partie de l'arc obtenue lorsque $t$ décrit $[-3\pi, 0]$. Au total, on bien la totalité de l'arc qui est une **courbe de Lissajous**.




Il y a des points doubles mais les symétries les fournissent immédiatement car en ces points, on traverse les axes. Il s'agit d'abord du point

$$M(\pi/2) = M(3\pi/2) = (0, 1/2)$$

et ensuite (par symétrie) du point

$$M(-\pi/2) = M(-3\pi/2) = (0, -1/2).$$