TELEEXERCICES03-T06
Enoncé

Exercice 01

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. On définit dans la suite la matrice : $B = Q \times A \times P$.
   Calculer B et expliciter pour tout entier n, la matrice B^n.
3. On veut calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer directement A^n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times B^n \times Q$.
   (c) En déduire A^n.
   (d) La matrice A^n est-elle inversible ?

Indications :
1 Le produit PQ suffit.
2 Une récurrence n'est pas demandée.
3-b Ici la récurrence est demandée.

Exercice 02

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes numérotées de 1 à n se présentent pour le poste. Chacune d'elles passe à tour de rôle un test, et la première qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in [0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit une variable aléatoire X de la façon suivante. Elle a pour valeur le numéro de la personne qui est engagée parmi les n personnes si quelqu'un réussit le test et elle a pour valeur $n + 1$ si personne ne réussit le test.

1. Notons Ω l'univers associé à l'expérience. Déterminer $X(\Omega)$.
2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ candidat réussit le test ».
   Écrire pour tout entier k compris entre 1 et n, l'événement $(X = k)$ sous forme d'une intersection d'événements A_i et d'événements contraires $\overline{A_i}$.
   Déterminer $P\left(\overline{A_1}\right)$ et $P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)$.
   De façon plus générale, calculer pour tout entier j possible, la probabilité conditionnelle
   $$P_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_{j-1}}}\left(\overline{A_j}\right).$$
   En utilisant la formule des probabilités composées, en déduire la probabilité $P(X = k)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, en fonction de p, q et k.
3. Calculer $P(X = n + 1)$.
4. En dérivant la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
5. Déterminer $E(X)$ en fonction de q et de n seuls.
6. Calculer $P(X \geqslant n)$.
7. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur 2 de recruter l'un des candidats ?