TELEEXERCICES03-T05
Enoncé

Exercice 01

Dans tout l'exercice, on considère une fonction ψ continue, des fonctions f et g dérivables et la fonction :

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} \psi(t)\, dt.$$

1. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ϕ'.
2. On suppose être de nouveau dans le cas général. Exprimer ϕ' en fonction de ψ, f, g, f' et g'.
3. On suppose ici $\psi : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$.
   (a) Exprimer ϕ' sur $\mathbb{R}^\star$.
   (b) Montrer que si $x > 0$,
   $$e^x \ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{2x} \ln 2.$$
   Peut-on prolonger ϕ par continuité en 0^+ ?
   (c) En appliquant un procédé semblable à gauche de 0, a t-on un prolongement par continuité en $x = 0$ de ϕ ?
   (d) Peut-on prolonger par continuité la fonction ϕ' en $x = 0$?
   (e) Peut-on déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x)$? Si oui, trouver cette limite.
   (f) Peut-on déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x)$? Si oui, trouver cette limite.
   (g) Dresser le tableau de variations de ϕ.

Indications :
2. Pour le calcul de ϕ', on pourra décomposer :

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{a} \psi(t)\, dt + \int_{a}^{g(x)} \psi(t)\, dt,$$

où a appartient au domaine de continuité de ψ.

Exercice 02

Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Monter que f admet des dérivées partielles premières en tout point.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
   f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Indications :
1. On rappelle que pour $x \neq 0$, la limite de $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$ est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.
2. On pourra passer en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
3. Par exemple, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ est la limite quand y tend vers 0, de $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y}$.