TELEEXERCICES03-T08
Enoncé

Exercice 01

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall (f,g) \in E$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$.

1. Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que
$$V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\, f'' = f\}$$
sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. On suppose que $g \in V$ et $f \in W$. Montrer que $\langle f, , g\rangle = 0$.
4. Comparer W et $\mathrm{Vect}\,\{t \mapsto e^t,\, t \mapsto e^{-t}\}$.
5. On pose pour tout t, $g(t) = f(t) - a\,e^t - b\,e^{-t}$ où $f \in E$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
Déterminer a et b en fonction de f pour avoir la condition $g \in V$.
En déduire que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.

Indications :
1. On rappelle que si g est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = 0$ alors g est nulle sur $[a,b]$.
3. Pour l'orthogonalité, on pourra faire une intégration par parties.
5. Pour exprimer la projection orthogonale sur W, on cherchera l'image par cette projection de $f \in E$ quelconque.

Exercice 02

Étudier les extremums locaux et globaux de

$$f\,:\,(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$

définie sur $\mathbb{R}^3$.

Indications :
On commencera par trouver les points critiques et si (x_0, y_0, z_0) est un tel point, on étudiera le signe de $f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)$ quand (x,y,z) est dans un voisinage de (x_0,y_0,z_0).