TELEEXERCICES03-T07
Enoncé

Exercice 01

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt.$$

1. Vérifier que $\langle\,,\,\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Montrer que Vect(cos) et Vect(sin) sont orthogonaux.
3. Calculer $\|\cos\|^2$, $\|\sin\|^2$, $\langle Id,\,\cos\rangle$ et $\langle Id,\,\sin\rangle$.
4. Soit le sous-espace vectoriel $G = \{f \in E, f'' + f = 0\}$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
   (b) On veut déterminer le projeté orthogonal de $Id : t \mapsto t$ sur G.
   On sait alors qu'il existe deux réels a et b tels que $p_G(Id) = a\cos t + b\sin t$.
   Justifier que : $\langle Id - p_G(Id), \cos\rangle = \langle Id - p_G(Id), \sin\rangle = 0$.
   En déduire a et b puis $p_G(Id)$.

Indications :
1. Il faut montrer la symétrie, linéarité à gauche par exemple puis la définie positivité. Pour la positivité, il faut se rappeler que si $a < b$ et f est une fonction continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0.$$

Exercice 02

Déterminer en fonction de x, où $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = n!x^{n^2} = n!\,e^{n^2\ln x}.$$

Indications :
La règle de D'Alembert est généralement utile lorsque u_n comporte des puissances ou des factorielles.