TELEEXERCICES03-T05
Enoncé

Exercice 01

Dans tout l'exercice, on considère une fonction ψ continue, des fonctions f et g dérivables et la fonction :

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} \psi(t)\, dt.$$

1. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x$ et ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ϕ'.
2. On suppose être de nouveau dans le cas général. Exprimer ϕ' en fonction de ψ, f, g, f' et g'.
3. On suppose ici $\psi : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R},\, t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto 2x$.
   (a) Exprimer ϕ' sur $\mathbb{R}^\star$.
   (b) Montrer que si $x > 0$,
   $$e^x \ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{2x} \ln 2.$$
   Peut-on prolonger ϕ par continuité en 0^+ ?
   (c) En appliquant un procédé semblable à gauche de 0, a t-on un prolongement par continuité en $x = 0$ de ϕ ?
   (d) Peut-on prolonger par continuité la fonction ϕ' en $x = 0$?
   (e) Peut-on déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x)$? Si oui, trouver cette limite.
   (f) Peut-on déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x)$? Si oui, trouver cette limite.
   (g) Dresser le tableau de variations de ϕ.

Indications :
2. Pour le calcul de ϕ', on pourra décomposer :

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{a} \psi(t)\, dt + \int_{a}^{g(x)} \psi(t)\, dt,$$

où a appartient au domaine de continuité de ψ.

Exercice 02

Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

1. Monter que f admet des dérivées partielles premières en tout point.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
   f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Indications :
1. On rappelle que pour $x \neq 0$, la limite de $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$ est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
2. On pourra passer en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
3. Par exemple, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ est la limite quand y tend vers 0, de $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$.

Correction

Exercice 01

Dans tout l'exercice, on considère une fonction ψ continue, des fonctions f et g dérivables et la fonction :

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} \psi(t)\,dt.$$

1. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et ψ est continue sur $\mathbb{R}$.
ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $\phi' = \psi$ d'après le cours et comme ψ est continue sur $\mathbb{R}$, $\phi' = \psi$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose être de nouveau dans le cas général. Exprimons ϕ' en fonction de ψ, f, g, f' et g'.
On écrit pour tout x,

$$\phi : x \mapsto \int_{f(x)}^{a} \psi(t)\,dt + \int_{a}^{g(x)} \psi(t)\,dt,$$

où a appartient au domaine de continuité de ψ. On a alors :

$$\phi' = -\psi(f(x))f'(x) + \psi(g(x))g'(x).$$

Remarque : Cette formule n'est valable que pour les x où ψ est continue sur $[f(x), a]$ et $[a, g(x)]$. Et alors les intégrales $\displaystyle\int_{f(x)}^{a} \psi(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{a}^{g(x)} \psi(t)\,dt$ existent. Mais on ne demande pas de préciser ici.

3-a On suppose ici $\psi : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$.
Attention, comme ψ n'est pas défini en 0, il faut faire deux cas.
• On suppose $x > 0$ et on peut prendre $a = 1$ dans le raisonnement précédent. Alors :

$$\phi'(x) = -\psi(x) + \psi(2x)2 = -\frac{e^x}{x} + 2\frac{e^{2x}}{2x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

• On suppose $x < 0$ et on peut prendre $a = -1$ dans le raisonnement précédent. Alors, on a de même,

$$\phi'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

3-b Si $x > 0$,

$$e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

Et donc :

$$e^x \ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{2x} \ln 2.$$

On prolonge ϕ par continuité en 0^+ car e^x et e^{2x} tendent vers 1 et d'après le théorème des Gendarmes, $\phi(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
3-c En appliquant un procédé semblable à gauche de 0, a t-on un prolongement par continuité en $x = 0$ de ϕ ?
On utilise : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = -\int_{2x}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$. Et alors, comme $\displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} < 0$,

$$e^x \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{2x}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant e^{2x} \int_{2x}^{x} \frac{dt}{t}.$$

Comme $\displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_{2x}^{x} = -\ln 2$, on a :

$$-e^x \ln 2 \leqslant -\phi(x) \leqslant -e^{2x} \ln 2.$$

C'est-à-dire :

$$e^{2x}\ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{x}\ln 2.$$

Quand x tend vers 0^-, $\phi(x)$ tend encore vers $\ln 2$.
Remarque : Attention, ici il ne faut pas écrire $\ln t$ car $t<0$. Avec $\ln|t|$, cela passe beaucoup mieux.
3-d On sait que pour $x \neq 0$, $\phi'(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}$.
En effectuant un développement limité en $x=0$,

$$\phi'(x) = (1+2x+o(x)-1-x+o(x))\frac{1}{x} = 1+o(1).$$

ϕ' se prolonge par continuité en $x=0$ et $\phi'(0)=1$.
3-e Peut-on déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)$?
On reprend la double inégalité,

$$e^{x}\ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{2x}\ln 2.$$

Si x tend vers $+\infty$, e^x et e^{2x} aussi. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$.
3-f Peut-on déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)$?
On utilise encore la double inégalité, celle valable pour $x<0$,

$$e^{2x}\ln 2 \leqslant \phi(x) \leqslant e^{x}\ln 2.$$

Si x tend vers $-\infty$, e^x et e^{2x} tendent vers 0. Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=0$.
3-g Si $x>0$, $e^{2x}>e^x$ et donc $\phi'(x)>0$ et ϕ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
Si $x<0$, $e^{2x}<e^x$ et donc $\phi'(x)>0$ et ϕ est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

Exercice 02

1. Les théorèmes généraux assurent l'existence sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ des dérivées partielles premières de f et de plus si $(x,y)\neq(0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

De même, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.
Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$.
Donc f admet une dérivée partielle première par rapport à x en $(0,0)$ qui vaut 0.
De même, f admet une dérivée partielle première par rapport à y en $(0,0)$ qui vaut 0.

Ainsi on a : $\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & = & 0 & \end{array}\right.$.

Et de même : $\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = & 0 & \end{array}\right.$.

2. En passant aux coordonnées polaires, on montre aisément que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
En effet, par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = fg(\theta)$, où g est fonction de θ.
Donc : $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Les théorèmes généraux assurent que si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

On a : $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y}{y} = -1 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$
De même, si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$
Puisque :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

alors le théorème de Schwarz assure que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Bien sûr, les théorèmes généraux assurent que, cependant, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.