TELEEXERCICES03-T06
Enoncé

Exercice 01

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. On définit dans la suite la matrice : $B = Q \times A \times P$.
   Calculer B et expliciter pour tout entier n, la matrice B^n.
3. On veut calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer directement A^n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times B^n \times Q$.
   (c) En déduire A^n.
   (d) La matrice A^n est-elle inversible ?

Indications :
1 Le produit PQ suffit.
2 Une récurrence n'est pas demandée.
3-b Ici la récurrence est demandée.

Exercice 02

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes numérotées de 1 à n se présentent pour le poste. Chacune d'elles passe à tour de rôle un test, et la première qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in [0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit une variable aléatoire X de la façon suivante. Elle a pour valeur le numéro de la personne qui est engagée parmi les n personnes si quelqu'un réussit le test et elle a pour valeur $n + 1$ si personne ne réussit le test.

1. Notons Ω l'univers associé à l'expérience. Déterminer $X(\Omega)$.
2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ candidat réussit le test ».
   Écrire pour tout entier k compris entre 1 et n, l'événement $(X = k)$ sous forme d'une intersection d'événements A_i et d'événements contraires $\overline{A_i}$.
   Déterminer $P\left(\overline{A_1}\right)$ et $P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)$.
   De façon plus générale, calculer pour tout entier j possible, la probabilité conditionnelle
   $$P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}}\left(\overline{A_j}\right).$$
   En utilisant la formule des probabilités composées, en déduire la probabilité $P(X = k)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, en fonction de p, q et k.
3. Calculer $P(X = n + 1)$.
4. En dérivant la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
5. Déterminer $E(X)$ en fonction de q et de n seuls.
6. Calculer $P(X \geqslant n)$.
7. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur 2 de recruter l'un des candidats ?

Correction

Exercice 01

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On a : $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Remarque : Il est inutile dans l'anneau des matrices carrées de vérifier que $QP = I_3$ aussi. Mais le faire quand même n'enlève pas des points.

2. On définit dans la suite la matrice : $B = Q \times A \times P$. Alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Comme B est diagonale, on sait que B^n est une matrice diagonale dont les coefficients sont les puissances $n^{\text{ème}}$ des coefficients correspondants de B. On a :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il est inutile de faire une récurrence pour avoir B^n. Encore une fois en faire une n'est pas non plus interdit.

3-a On a rapidement :

$$A^0 = I_3,\ A^1 = A,\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -64 & 0 & -64 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

3-b Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times B^n \times Q$. Notons $\mathcal{P}_n$ cette proposition.
Il est clair que $\mathcal{P}_0$ est vraie. En effet,

$$A^0 = I_3 \text{ et } P \times B^0 \times Q = PQ = I_3.$$

De même, il est clair que $\mathcal{P}_1$ est vraie. En effet,

$$A^1 = A \text{ et } P \times B \times Q = P(QAP)Q = I_3 A I_3 = A.$$

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un n entier naturel non nul. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (P \times B^n \times Q)\, A = (P \times B^n \times Q)\,(P \times B \times Q) = P \times B^{n+1} \times Q.$$

C'est bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

Remarque : Ici la récurrence est indispensable mais attention pour l'hérédité, on a besoin du cas $n = 1$. Donc il faut initialiser jusqu'à $n = 1$.

3-c On se lance courageusement dans le calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ (-1)^{n+1} + 8^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

3-d La matrice A^n n'est pas inversible car son déterminant est nul. En effet, A^n a une colonne nulle et il suffit de développer le déterminant selon cette colonne.

Remarque : Il y a d'autres pistes. On peut remarquer par exemple que $\mathsf{Det}\, B^n = 0$ et comme $A^n = PB^nQ$, alors $\mathsf{Det}\, A^n = 0$. On peut aussi montrer que la matrice C telle que $A^nC = I_3$ n'existe pas mais c'est bien plus long. On peut aussi vérifier que A n'est pas inversible car $\mathsf{Det}\, A = 0$ et donc A^n aussi. On peut aussi chercher $\operatorname{Ker} A^n$ qui n'est pas réduit au vecteur nul.

Exercice 02

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes numérotées de 1 à n se présentent pour le poste. Chacune d'elles passe à tour de rôle un test, et la première qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in [0,1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit une variable aléatoire X de la façon suivante. Elle a pour valeur le numéro de la personne qui est engagée parmi les n personnes si quelqu'un réussit le test et elle a pour valeur $n+1$ si personne ne réussit le test.

1. Notons Ω l'univers associé à l'expérience. Alors : $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ candidat réussit le test ».
Écrivons pour tout entier k compris entre 1 et n, l'événement $(X = k)$ sous forme d'une intersection d'événements A_i et d'événements contraires $\overline{A_i}$.
On a rapidement : $(X = k) = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k$.
De même, $P\left(\overline{A_1}\right) = P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) = q$.
De façon plus générale, calculons pour tout entier j possible, la probabilité conditionnelle $P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}}\left(\overline{A_j}\right)$.
C'est la probabilité que le candidat j échoue au test (qu'il ne passe que si les candidats précédents ont tous échoué).
On a : $P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}}\left(\overline{A_j}\right) = q$.
Utilisons la formule des probabilités composées, la probabilité $P(X = k)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, est :

$$P(X = k) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}}\left(A_k\right) = q^{k-1}p.$$

3. $(X = n+1)$ est le cas où tous les candidats échouent. On a : $P(X = n+1) = q^n$.

4. Pour tout $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

En dérivant cette formule, calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

5. Déterminons $E(X)$ en fonction de q et de n seuls.
On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p + (n+1)q^n$. Ce qui donne :

$$E(X) = p\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} + (n+1)q^n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{1-q} + (n+1)q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

6. Calculons $P(X \geqslant n)$.
On a : $P(X \geqslant n) = P(X = n) + P(X = n+1) = q^{n-1}p + q^n = q^{n-1}(p+q) = q^n$.

7. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur 2 de recruter l'un des candidats ?
On recrute l'un des candidats si $(X \leqslant n)$. On cherche ici :

$$P(X \leqslant n) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - q^n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow q^n \leqslant \frac{1}{2}.$$

Cela se traduit par $p \geqslant 1 - \dfrac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$.