TELEEXERCICES03-T08
Enoncé

Exercice 01

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall (f,g) \in E$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$.

1. Montrer que $\langle\,,\,\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que
$$V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\, f'' = f\}$$
sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. On suppose que $g \in V$ et $f \in W$. Montrer que $\langle f, , g\rangle = 0$.
4. Comparer W et Vect $\{t \mapsto e^t,\, t \mapsto e^{-t}\}$.
5. On pose pour tout t, $g(t) = f(t) - a\,e^t - b\,e^{-t}$ où $f \in E$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
Déterminer a et b en fonction de f pour avoir la condition $g \in V$.
En déduire que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.

Indications :
1. On rappelle que si g est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = 0$ alors g est nulle sur $[a,b]$.
3. Pour l'orthogonalité, on pourra faire une intégration par parties.
5. Pour exprimer la projection orthogonale sur W, on cherchera l'image par cette projection de $f \in E$ quelconque.

Exercice 02

Étudier les extremums locaux et globaux de
$$f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$
définie sur $\mathbb{R}^3$.

Indications :
On commencera par trouver les points critiques et si (x_0, y_0, z_0) est un tel point, on étudiera le signe de $f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)$ quand (x,y,z) est dans un voisinage de (x_0,y_0,z_0).

Correction

Exercice 01

1. Linéarité à droite
Soient trois fonctions f, g et h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors : $\langle f, g+ah\rangle$ vaut

$$\int_0^1 f(t)(g(t)+ah(t))\,dt + \int_0^1 f'(t)(g'(t)+ah'(t))\,dt = \langle f,g\rangle + a\langle f,h\rangle.$$

Symétrie
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $\langle f,g\rangle$ vaut :

$$\begin{array}{rc} & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt \\ = & \displaystyle\int_0^1 g(t)f(t)\,dt + \int_0^1 g'(t)f'(t)\,dt \\ = & \langle g,f\rangle \end{array}$$

Positivité
La quantité $\langle f,f\rangle$ vaut : $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt + \int_0^1 f'^{\,2}(t)\,dt$.
Elle est clairement positive ou nulle.
On a de plus, l'implication :

$$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, f est identiquement nulle sur $[0,1]$.
2. On montre facilement que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E, par exemple en les interprétant comme des noyaux d'applications linéaires.
3. Soit $g \in V$ et $f \in W$, alors, après une intégration par parties :

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt + [f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f''(t)g(t)\,dt.$$

Il reste à arranger l'expression. On a :

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_0^1 (f(t)-f''(t))\,g(t)dt \\ &\quad +(f'(1)g(1)-f'(0)g(0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

4. Il est clair que $W = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$.
5. Il reste à montrer que $E = V \oplus W$. et par ailleurs, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in E$, prenons $g(t) = f(t) - ae^t - be^{-t}$ et cherchons des valeurs de a et b pour lesquelles $g \in V$.
Comme $g(0) = f(0) - a - b$ et comme $g(1) = f(1) - a\,e - \frac{b}{e}$, on a :

$$g(0) = g(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{ef(1)-f(0)}{e^2-1} \text{ et } b = \frac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1}.$$

Pour ces valeurs,

$$f : t \mapsto g(t) + ae^t + be^{-t} \in V + W.$$

On a : $E = V + W$.
Enfin, $V \perp W$ et donc la somme est directe ! On peut conclure.
Alors $p_W(f(t)) = \dfrac{ef(1) - f(0)}{e^2 - 1}e^t + \dfrac{e^2 f(0) - ef(1)}{e^2 - 1}e^{-t}$.

Exercice 02

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$.
• Recherchons les points critiques.
On a :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2yz$;
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - 2xz$;
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2xy$; donc la résolution du système :
$$\begin{cases} 2x - 2yz = 0 \\ 2y - 2xz = 0 \\ 2z - 2xy = 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow x = yz,\ y = xz,\ z = xy$
$\Rightarrow xyz = (xyz)^2$
$\Rightarrow xyz = 0$ ou $xyz = 1$.
Or, $x = 0 \Rightarrow y = z = 0$ donc $(0, 0, 0)$ est un point critique et :
$xyz = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ donc les autres points critiques sont : $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$.
• Étudions la nature de $(0, 0, 0)$.
On a : $f(x, y, z) - f(0, 0, 0)$
$= x^2 - 2yzx + y^2 + z^2$ et en considérant cette expression comme un trinôme en x alors le discriminant vaut :
$$4\left(\left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right) - 1\right),$$
et est donc négatif pour (y, z) au voisinage de $(0, 0)$ donc :
$f(x, y, z) - f(0, 0, 0) \geq 0$ au voisinage de $(0, 0, 0)$ donc f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$ qui vaut 0. Puisque :
$f(x, x, x) = 3x^2 - 2x^3$ et :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, x, x) = -\infty$, alors f n'admet pas un minimum global en $(0, 0, 0)$.
• Étudions la nature de $(1, 1, 1)$.
On a :
$f(1 + x, 1 + y, 1 + z) - f(1, 1, 1)$
$= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx + xyz)$.
On a $f(1 + x, 1, 1) - f(1, 1, 1) = x^2 \geq 0$ et :
$f(1 + x, 1 + x, 1 + x) - f(1, 1, 1)$
$= -3x^2 - 2x^3 = -x^2(3 + 2x) \leq 0$ au voisinage de 0 donc on conclut que f n'admet pas d'extremum en $(1, 1, 1)$.
• Étudions la nature de $(1, -1, -1)$.
On a :
$f(1 + x, -1 + y, -1 + z) - f(1, -1, -1)$
$= x^2 + y^2 + z^2 - 2(-xy + yz - zx + xyz)$.
On a aussi :
$f(1 + x, -1, -1) - f(1, -1, -1)$
$= x^2 \geq 0$ et :
$f(1 + x, -1 - x, -1 - x) - f(1, -1, -1)$
$= -3x^2 - 2x^3 = -x^2(3 + 2x) \leq 0$ au voisinage de 0 donc on conclut que f n'admet pas d'extremum en $(1, -1, -1)$.
On démontrerait de la même manière que f n'admet pas d'extremum en $(-1, 1, -1)$ et en $(-1, -1, 1)$.