TELEEXERCICES03-T07
Enoncé

Exercice 01

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt.$$

1. Vérifier que $\langle\, , \,\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Montrer que Vect(cos) et Vect(sin) sont orthogonaux.
3. Calculer $\|\cos\|^2$, $\|\sin\|^2$, $\langle Id, \cos\rangle$ et $\langle Id, \sin\rangle$.
4. Soit le sous-espace vectoriel $G = \{f \in E, f'' + f = 0\}$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
   (b) On veut déterminer le projeté orthogonal de $Id : t \mapsto t$ sur G.
   On sait alors qu'il existe deux réels a et b tels que $p_G(Id) = a\cos t + b\sin t$.
   Justifier que : $\langle Id - p_G(Id), \cos\rangle = \langle Id - p_G(Id), \sin\rangle = 0$.
   En déduire a et b puis $p_G(Id)$.

Indications :
1. Il faut montrer la symétrie, linéarité à gauche par exemple puis la définie positivité. Pour la positivité, il faut se rappeler que si $a < b$ et f est une fonction continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0.$$

Exercice 02

Déterminer en fonction de x, où $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = n!x^{n^2} = n!\,e^{n^2 \ln x}.$$

Indications :
La règle de D'Alembert est généralement utile lorsque u_n comporte des puissances ou des factorielles.

Correction

Exercice 01

1. Montrons que $(f,g) \mapsto \langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.
α) Symétrie
Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,\pi]$.
On a clairement : $\langle f,\, g\rangle = \langle g,\, f\rangle$.
β) Linéarité à gauche
Soient f, g et h trois fonctions continues sur $[0,\pi]$ et a un réel, alors :

$$\langle f+ag,\, h\rangle = \int_0^\pi (f(t)+ag(t))h(t)\,dt = \langle f,\, h\rangle + a\langle g,\, h\rangle.$$

γ) Positivité
Pour la positivité, il faut se rappeler que si $a<b$ et f est une fonction continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x\in[a,b],\, f(x)=0.$$

On a : $\langle f,\, f\rangle \geq 0$ et $\langle f,\, f\rangle = 0$ entraîne que f^2 est nulle sur $[0,\pi]$ car continue et positive donc f est nulle sur $[0,\pi]$.
2. Montrons que Vect(cos) et Vect(sin) sont orthogonaux.
On écrit : $\displaystyle\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin 2t}{2}\,dt = \left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^\pi = 0.$
On a : $\langle \cos,\, \sin\rangle = 0$ et la famille $\{\cos,\sin\}$ est orthogonale. On en déduit que les deux droites vectorielles Vect(cos) et Vect(sin) sont orthogonales.
3. Puis : $\|\cos\|^2 = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \|\sin\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$,
puis, en pratiquant des intégrations par parties classiques,
$\langle Id,\cos\rangle = \displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,dt = -2$, $\langle Id,\sin\rangle = \displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,dt = \pi$.
4-a On sait que l'équation différentielle $y''+y=0$ (d'équation caractéristique $r^2+1=0$) a pour solution les combinaisons linéaires de sin et cos.
4-b Si l'on note p_G la projection orthogonale de E sur G, on sait donc qu'il existe deux réels a et b tels que $p_G(Id) = a\cos t + b\sin t$.
Il reste à exploiter $Id - p_G(Id) \in G^\perp$, c'est-à-dire :

$$\langle Id - p_G(Id),\cos\rangle = \langle Id - p_G(Id),\sin\rangle = 0.$$

Cela donne : $(S)\ \left\{\begin{array}{lcccc} a\|\cos\|^2 + b\langle\cos,\sin\rangle & = & \langle Id,\cos\rangle & = & -2 \\ a\langle\cos,\sin\rangle + b\|\sin\|^2 & = & \langle Id,\sin\rangle & = & \pi \end{array}\right.$.
On résout alors le système (S) : $a = -\dfrac{4}{\pi}$ et $b=2$.

Exercice 02

La série est à termes positifs, $x\neq 0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\,x^{2n+1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ si $x<1$, la série est donc convergente pour $x<1$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $x\geq 1$, alors la série diverge grossièrement pour $x \geq 1$.