TELEEXERCICES03-T03

Enoncé

Exercice 01

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On tire avec remise dans cette urne une boule de manière successive.
On note les numéros $b_1, b_2, .., b_k$ des boules successivement tirées. On s'arrête dès que $b_{k-1} \leqslant b_k$.
Soit X la v.a.r.d égale au nombre de tirages effectués.

1. Vérifier que $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
2. On veut calculer $P(X > k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (a) Justifier que l'ensemble des k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers (distincts ou non) compris entre 1 et n est de cardinal égal à n^k
   (b) En admettant que le nombre d'applications injectives de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, justifier que le nombre d'applications strictement décroissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dbinom{n}{k}$.
   Justifier que c'est aussi le nombre de k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers compris entre 1 et n tels que $b_1 > b_2 > ... > b_k$.
   (c) Écrire $P(X > k) = P(b_1 > b_2 > ... > b_k)$ sous la forme d'un rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
3. Si l'on note F_X la fonction de répartition de X, calculer $F(k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
4. En déduire pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
5. Application numérique; calculer $F(3)$ puis $F(2)$ puis $P(X = 3)$ pour $n = 4$.

Indications :
3. On rappelle que $F_X(k) = P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
4. Pour $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

Exercice 02

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{ch} n) x^n.$$

On rappelle que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Indications :

Pour le calcul de la somme, on montrera que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire de sommes de suites géométriques.