# TELEEXERCICES03-T02
# Enoncé

---

**Exercice 01**

Représenter l'arc paramétré défini par

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

**Indications :**
On remarque que $x(2\pi - t)$ et $y(2\pi - t)$ s'expriment simplement en fonction de $x(t)$ et de $y(t)$.
On expliquera alors pourquoi on étudiera la courbe sur $J = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ car on effectuera une symétrie à préciser ensuite.

---

**Exercice 02**

On veut déterminer ici la valeur de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, si $x \in \left]-1, 1\right[$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$.
2. **Première méthode pour calculer** $f(x)$.
   (a) Rechercher des réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que : $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$.
   (b) Déterminer pour tout $x \in ]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
   (c) En déduire alors $f(x)$ pour tout $x \in ]-1, 1[$.
3. **Deuxième méthode pour calculer** $f(x)$.
   (a) Montrer directement en utilisant la dérivation des séries entières que pour tout $x \in ]-1, 1[$, $f''(x)$ vaut $-\ln(1-x)$.
   (b) En déduire alors $f'(x)$ pour tout $x \in ]-1, 1[$ par une intégration par parties. On remarquera que $f'(0) = 0$.
   (c) En déduire enfin $f(x)$ pour tout $x \in ]-1, 1[$ par une nouvelle intégration par parties. On remarquera que $f(0) = 0$.

**Indications :**
**1.** On pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ et on cherche la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$.
**2-a** On met $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$ sous le même dénominateur.
**2-b** Pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on reconnait la somme d'une série géométrique et pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, on l'intègre.
**2-c** On remplace dans l'expression de $f(x)$ la fraction $\dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ en utilisant **2-a**. Puis, on a des sommes qui ressemblent à la deuxième somme de **2-b**.
**3-a** On sait que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
**3-b** On pourra utiliser : $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
**3-c** On pourra utiliser : $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.