TELEEXERCICES03-T03
Enoncé

Exercice 01

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On tire avec remise dans cette urne une boule de manière successive.
On note les numéros $b_1, b_2, .., b_k$ des boules successivement tirées. On s'arrête dès que $b_{k-1} \leqslant b_k$.
Soit X la v.a.r.d égale au nombre de tirages effectués.

1. Vérifier que $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
2. On veut calculer $P(X > k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (a) Justifier que l'ensemble des k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers (distincts ou non) compris entre 1 et n est de cardinal égal à n^k
   (b) En admettant que le nombre d'applications injectives de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, justifier que le nombre d'applications strictement décroissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dbinom{n}{k}$.
   Justifier que c'est aussi le nombre de k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers compris entre 1 et n tels que $b_1 > b_2 > ... > b_k$.
   (c) Écrire $P(X > k) = P(b_1 > b_2 > ... > b_k)$ sous la forme d'un rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
3. Si l'on note F_X la fonction de répartition de X, calculer $F(k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
4. En déduire pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
5. Application numérique; calculer $F(3)$ puis $F(2)$ puis $P(X = 3)$ pour $n = 4$.

Indications :
3. On rappelle que $F_X(k) = P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
4. Pour $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

Exercice 02

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{ch} n) x^n.$$

On rappelle que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Indications :

Pour le calcul de la somme, on montrera que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire de sommes de suites géométriques.

Correction

Exercice 01

1. Vérifions que $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
En effet, il y a au moins deux tirages (pour les comparer). Soit $j \leqslant n$. Si aucun des j premiers numéros tirés ne vérifie $b_{k-1} \leq b_k$: $b_1 > b_2 > ... > b_j$.
Donc si aucun des n premiers numéros tirés ne vérifie $b_{k-1} \leq b_k$:
$b_1 = n$, $b_2 = n-1$, ..., $b_n = 1$ car il n'y a que n numéros.
Le tirage $n+1$ ne pourra vérifier $b_{n+1} \geqslant b_n$.

2. On veut calculer $P(X > k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
2-a Justifions que l'ensemble des k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers (distincts ou non) compris entre 1 et n est de cardinal égal à n^k.
En effet, il y a n possibilités de choisir b_1, puis encore n de choisir b_2, etc. Il y a donc $n \times n \times ... \times n$ possibilités de choisir à la fois $b_1, ..., b_k$. Cela fait bien n^k.

2-b Justifions que le nombre d'applications strictement décroissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n}{k}$.

On admet que le nombre d'applications injectives de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dfrac{(n-k)!}{k!}$.
Parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image $Im\, f = \{f(1), ..., f(k)\}$. Attention, $Im\, f$ possède k éléments distincts car f est une injection.
Il y a $k!$ injections f différentes pour chaque image $Im\, f$ différente (c'est le nombre de façons de permuter les k éléments de $Im\, f$) Or parmi ces $k!$ injections de même image, une seule est strictement décroissante c'est-à-dire vérifiant $f(1) < f(2) < ... < f(k)$.
Le nombre d'applications strictement décroissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Justifions que c'est aussi le nombre de k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers compris entre 1 et n tels que $b_1 > b_2 > ... > b_k$.
Le nombre de tels k-uplets $(b_1, b_2, ..., b_k)$ d'entiers compris entre 1 et n tels que $b_1 > b_2 > ... > b_k$ est le nombre d'applications strictement décroissantes f telles que à tout entier $i \in [\![1, k]\!]$, on associe $f(i) = b_i$.
Il y en a donc $\binom{n}{k}$.

2-c Écrivons $P(X > k) = P(b_1 > b_2 > ... > b_k)$ sous la forme d'un rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
On remarque que : $P(X > k) = P(b_1 > b_2 > ... > b_k)$.
En faisant l'hypothèse raisonnable d'équiprobabilité de chaque boule tirée, il y a nécessairement équiprobabilité de chaque k-uplet $(b_1, ..., b_k)$ obtenu au cours des k tirages. L'ensemble des k-uplets possibles est de cardinal égal à n^k (tirages avec remise).
L'ensemble des k-uplets réalisant l'événement $(X > k)$ est de cardinal égal au nombre d'applications strictement décroissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.

Ainsi : $P(X > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

3 Si l'on note F_X la fonction de répartition de X, calculons $F(k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
On a immédiatement :

$$F_X(k) = 1 - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}.$$

4 Déterminons pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k)$.
Pour $k \in X(\Omega)$, si $k \geqslant 3$,

$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}.$$

Si $k=2$, comme $F_X(1)=0$, $P(X=2)=F_X(2)$.

5 Application numérique ; calculons $F(3)$ puis $F(2)$ puis $P(X=3)$ pour $n=4$.

On a : $F(3) = 1 - \dfrac{\binom{4}{3}}{4^3} = \dfrac{15}{16}$ et $F(2) = 1 - \dfrac{\binom{4}{2}}{4^2} = \dfrac{5}{8}$ et $P(X=3) = F_X(3) - F_X(2) = \dfrac{15}{16} - \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{16}$.

Exercice 02

Comme $\operatorname{ch} n \sim e^n/2$, les séries entières $\sum \operatorname{ch} n x^n$ et $\sum e^n x^n$ ont le même rayon de convergence.

La série géométrique $\sum (ex)^n$ converge si et seulement si $|ex| < 1$.

Le rayon de convergence commun est donc $R = \dfrac{1}{e}$.

On écrit pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^n + e^{-n}\right) x^n.$$

Or :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^n x^n = \frac{1}{1-xe}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} x^n = \frac{e}{e-x}.$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-xe} + \frac{e}{e-x} \right).$$