

Enoncé

Exercice 01

Soit Γ l'arc admettant le paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}.$$

1. L'arc présente-t-il des symétries ?
2. Calculer les limites en $\pm\infty$ de $\frac{y(t)}{x(t)}$.
Peut-on tirer des conclusions quant à l'allure de Γ pour les grandes valeurs du paramètre t ?
3. Faire un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de $y(t) - \frac{x(t)}{2}$.
Que peut-on en déduire pour l'arc Γ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$?
Préciser la position de Γ par rapport à cette droite.

Indications :

Pour une fois on peut y arriver sans.

Exercice 02

On tire au hasard, successivement et sans remise, 4 lettres du mot « ATTACHANT ». On considère le mot formé par les lettres obtenues dans l'ordre où elles apparaissent.

Notons pour $1 \leq n \leq 4$, A_n l'événement : « obtenir dans l'ordre les n premières lettres du mot chat ».

1. Calculer $P(A_1)$.
2. Calculer $P(A_2|A_1) = P_{A_1}(A_2)$.
3. Calculer de même $P(A_3|A_2)$ et $P(A_4|A_3)$.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « CHAT » ?

Indications :

4. On utilisera la formule des probabilités composées pour obtenir $P(A_4)$.

Correction

Exercice 01

1. Comme x n'est ni paire, ni impaire et n'a aucune période, il n'y a pas de symétries.
2. L'arc Γ est défini pour $t \neq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t + \frac{1}{t}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^2 + 1}{t^3 + 2} = 0.$$

Donc $x(t)$ tend vers l'infini plus rapidement que $y(t)$. La courbe Γ tend à devenir parallèle à l'axe des abscisses pour des grandes valeurs de t .

Remarque : on parle de branche parabolique dans la direction de Ox .

3. On a : $y(t) - \frac{x(t)}{2} = \frac{t(2-t)}{2}$ et au voisinage de 0,

$$y(t) - \frac{x(t)}{2} = t + o(t).$$

Donc au voisinage de 0, $y(t)$ se comporte comme $\frac{1}{2}x(t)$.
La droite d'équation

$$y = \frac{1}{2}x \text{ est asymptote à } \Gamma.$$

Pour $t \in]0, 2[$, $y(t) - \frac{x(t)}{2} > 0$ et la courbe est au-dessus de son asymptote.

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$, $y(t) - \frac{x(t)}{2} < 0$ et la courbe est en dessous de son asymptote.

Exercice 02

1. Il est clair que : $P(A_1) = \frac{1}{9}$ car il y a une chance sur 9 de sortir la lettre C.
2. $P(A_2|A_1) = \frac{1}{8}$ car la lettre C étant sortie, il y a une chance sur 8 de sortir la lettre H ;
3. $P(A_3|A_2) = \frac{3}{7}$ car les lettres C et H étant sorties, il y a 3 chances sur 7 de sortir la lettre A ;
 $P(A_4|A_3) = \frac{3}{6}$ car les lettres C, H et A étant sorties, il y a 3 chances sur 6 de sortir la lettre T.
4. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(A_4) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_2) P(A_4|A_3).$$

Ainsi, on a finalement : $P(A_4) = \frac{1}{336}$.