TELEEXERCICES03-T02
Enoncé

Exercice 01

Représenter l'arc paramétré défini par

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

Indications :
On remarque que $x(2\pi - t)$ et $y(2\pi - t)$ s'expriment simplement en fonction de $x(t)$ et de $y(t)$.
On expliquera alors pourquoi on étudiera la courbe sur $J = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ car on effectuera une symétrie à préciser ensuite.

Exercice 02

On veut déterminer ici la valeur de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, si $x \in]-1, 1[$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$.
2. **Première méthode pour calculer** $f(x)$.
   (a) Rechercher des réels α, β et γ tels que : $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$.
   (b) Déterminer pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
   (c) En déduire alors $f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
3. **Deuxième méthode pour calculer** $f(x)$.
   (a) Montrer directement en utilisant la dérivation des séries entières que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f''(x) = -\ln(1-x)$.
   (b) En déduire alors $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$ par une intégration par parties.
   On remarquera que $f'(0) = 0$.
   (c) En déduire enfin $f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$ par une nouvelle intégration par parties.
   On remarquera que $f(0) = 0$.

Indications :
1. On pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ et on cherche la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$.
2-a On met $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$ sous le même dénominateur.
2-b Pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on reconnait la somme d'une série géométrique et pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, on l'intègre.
2-c On remplace dans l'expression de $f(x)$ la fraction $\dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ en utilisant **2-a**. Puis, on a des sommes qui ressemblent à la deuxième somme de **2-b**.
3-a On sait que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
3-b On pourra utiliser : $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
3-c On pourra utiliser : $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

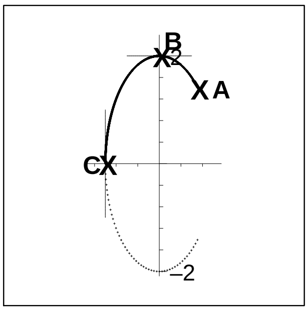
Correction

Exercice 01

Étape 1
On obtient $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Cela ressemble à un cercle si l'on prend sur l'axe des y une échelle double par rapport à celle de l'axe des x. Dans le repère orthonormé classique, c'est une courbe maintenant hors programme en PC, on l'appelle une ellipse (Les ellipses représentent la trajectoire des satellites et des planètes). Donc, nous devons faire les étapes suivantes.
Étape 2
Ici on impose $I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$, mais cela n'empêche pas de trouver des symétries.
On remarque que

$$x(2\pi - t) = x(t) \text{ et } y(2\pi - t) = -y(t).$$

Comme π est le centre de I, on étudiera donc la courbe sur $J = \left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$ et on effectuera une symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.
Remarque : on peut remarquer aussi $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, l'arc pour $t \in [\pi/4, \pi/2]$ et pour t dans $[\pi/2, 3\pi/4]$ sont symétriques par rapport à Oy. Comme J n'est pas centré en $\pi/2$, cela est d'une utilité limité, donc cela ne mérite qu'une remarque.
Étape 3
Sur J, $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = 2\cos t$. Donc x est décroissante sur J et y croît sur $[\pi/4, \pi/2]$ et décroît sur $[\pi/2, \pi]$.
Étape 4
Donc l'arc possède une tangente verticale en $M(\pi) = (-1, 0)$ et une tangente horizontale en $M(\pi/2) = (0, 2)$.
Étape 5
Tracé : on part de $A = M(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, la tangente ayant une pente de -2. Comme x est décroissante et y croissante sur $[\pi/4, \pi/2]$, on va vers la gauche en montant jusqu'à $B = M(\frac{\pi}{2})$. Puis x et y sont décroissantes sur $[\pi/2, \pi]$. On continue toujours sur la gauche en descendant maintenant jusqu'à $C = M(\pi)$.
Étape 6. Enfin, on trace le symétrique (en pointillé) par rapport à Ox de l'arc tracé à l'étape 5.



Exercice 02

1. Déterminons le rayon de convergence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$.

On pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ et on cherche la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$.

On écrit : $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n)(n-1)}}{\dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}}\right| = \dfrac{x(n+1)}{(n-2)}$, quantité qui tend vers $|x|$.

Donc quand $|x| < 1$, la série converge absolument et quand $|x| > 1$, elle diverge grossièrement.
Le rayon de convergence est 1. D'où le fait qu'on bosse sur $]-1,1[$.

2 Première méthode pour calculer $f(x)$.

2-a Recherchons des réels α, β et γ tels que : $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$.

On met $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n-1} + \dfrac{\gamma}{n-2}$ sous le même dénominateur.

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-2} = \frac{2\alpha + n(-3\alpha - 2\beta - \gamma) + n^2(\alpha + \beta + \gamma)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Puis on identifie et on trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = -1$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

2-b Déterminons pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on reconnait la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Et en intégrant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

2-c On va déduire alors $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

On remplace dans l'expression de $f(x)$ la fraction $\dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ en utilisant **2-a**. Puis, on a des sommes qui ressemblent à la deuxième somme de **2-b**.

Alors, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{2(n-2)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{2(n-2)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - x \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{m} + x^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{2p} \\
&= \frac{-1}{2} \ln(1-x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - x\left(-\ln(1-x) - x\right) - \frac{x^2}{2} \ln(1-x) \\
&= \frac{1}{4}\left(-2x + 3x^2\right) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \ln(1-x).
\end{aligned}$$

3. Deuxième méthode pour calculer $f(x)$.

3-a Montrons directement en utilisant la dérivation des séries entières que pour tout $x \in]-1,1[$, $f''(x) = -\ln(1-x)$.

On sait que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

On remarque que le rayon de convergence est 1 et donc on applique les règles de dérivation des séries entières S10.6 sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}.$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ f''(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

3-b On va en déduire alors $f'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ par une intégration par parties.

On pourra utiliser : $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

$$-\int \ln(1-x)\,dx = \int \frac{x}{x-1}\,dx - x\ln(1-x) + K,$$

où K est une constante que l'on va préciser. Comme :

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

on en déduit (car $x \in]-1,1[$) :

$$-\int \ln(1-x)\,dx = x + \ln(1-x) - x\ln(1-x) + K.$$

Puis $f'(0) = 0$ et donc $K = 0$.

3-c On va en déduire enfin $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ par une nouvelle intégration par parties. On remarquera que $f(0) = 0$.

On pourra utiliser : $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Intégrons :

$$\int x\ln(1-x)\,dx = -\int \frac{x^2}{2(x-1)}\,dx + \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + L,$$

où L est une nouvelle constante. Comme ;

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1},$$

on en déduit :

$$\int x\ln(1-x)\,dx = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + L.$$

Enfin :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + x\ln(1-x) + L.$$

Comme $f(0) = 0$, $L = 0$ et on retrouve le même résultat que précédemment.